

Алгебра
Рабочая
тетрадь

9



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Алгебра

Рабочая тетрадь

9

класс

Пособие для учащихся
общеобразовательных
учреждений

6-е издание, доработанное

Москва
·Просвещение·
2012

УДК 373.167.1:51
ББК 22.14я72
А45

Авторы:

**Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачёва,
Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин**

Рабочая тетрадь написана в соответствии с концепцией обучения алгебре по учебнику «Алгебра. 9 класс» авторов Ш. А. Алимова и др., а также в соответствии с его содержанием и структурой, дополнена упражнениями по темам «Случайные события» и «Случайные величины». Упражнения тетради разделены на три раздела. Первый содержит упражнения для подготовки учащихся к изучению нового материала, второй содержит упражнения, дополнительные к упражнениям учебника, третий — упражнения для проверки уровня усвоения материала.

ISBN 978-5-09-021194-9

© Издательство «Просвещение», 2002
© Издательство «Просвещение»,
с изменениями, 2012
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2002
Все права защищены

Данная рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Алгебра, 9» авторов Ш. А. Алимова и др. Содержание тетради организовано в соответствии с главами и параграфами этого учебника.

Тетрадь предназначена в основном для работы учащихся в классе. Следует иметь в виду, что рабочая тетрадь **не заменяет** ни живого слова учителя, ни текста учебника. Она дополняет и то и другое, расширяя арсенал учебных средств учащихся и возможности работы учителя. Структурно материал каждого параграфа тетради расположен по **трём** разделам. После I раздела, который предназначен для подготовки школьников к изучению нового материала соответствующего параграфа книги, проведена черта. Эта черта означает, что после выполнения заданий I раздела учитель приступает к объяснению нового материала так, как он считает нужным. Проведя объяснение, учитель работает с учащимися над упражнениями учебника; при этом ученики записывают решение традиционно в обычной тетради.

Раздел II — это основной раздел в рабочей тетради, он содержит упражнения, дополнительные к упражнениям учебника. Некоторые из упражнений тетради являются подготовительными к выполнению упражнений учебника, некоторые помогают слабым учащимся в усвоении определённых алгоритмов благодаря увеличению от задания к заданию доли самостоятельной работы школьников. Наиболее трудные упражнения раздела отмечены знаком *.

В разделе III приведены тексты упражнений, позволяющих проверить уровень усвоения материала рассматриваемого параграфа. Учитель может выборочно использовать их для проверки качества домашней работы учащихся.

Алгебраические уравнения. Системы нелинейных уравнений

§ 1. Деление многочленов

I

- 1 Выполнить деление чисел уголком, результат проверить умножением:

1) $462 : 14 = \dots\dots\dots$

$$\begin{array}{r} 462 \overline{) 14} \\ - 42 \\ \hline 3 \end{array}$$

2) $1776 : 37 = \dots\dots\dots$

- 2 Записать в виде неправильной дроби число:

1) $14 \frac{5}{6} = 14 + \frac{5}{6} = \frac{84 + \dots\dots}{6} = \dots\dots\dots$

2) $15 \frac{3}{8} = \dots\dots\dots$

- 3 Выполнив деление уголком, записать число в виде суммы целого числа и правильной дроби, результат проверить сложением:

1) $\frac{223}{9} = \dots\dots\dots$

$$\begin{array}{r} 223 \overline{) 9} \\ - 18 \\ \hline 43 \\ - 36 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$24 + \frac{7}{9} = \frac{216 + \dots\dots}{9} = \dots\dots\dots$$

$$2) \frac{337}{8} = \dots\dots\dots$$

.....

.....

.....

4 Сократить дробь:

$$1) \frac{3x^4 - 5x^2 + x}{3x^3 - 5x + 1} = \dots\dots\dots$$

$$2) \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \dots\dots\dots$$

$$3) \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = \dots\dots\dots$$

5 Выполнить деление многочлена на одночлен:

$$1) (4x^6 - 8x^4 + 10x^2) : 2x^2 = \dots\dots\dots$$

$$2) (5x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2) : \frac{1}{2}x^2 = \dots\dots\dots$$

.....

.....

II

6 Выполнить деление многочленов уголком, результат проверить умножением:

$$1) \begin{array}{r|l} 3x^3 - 5x^2 - 6x + 8 & 3x^2 + x - 4 \\ \underline{3x^3 + x^2 - 4x} & x - 2 \\ -6x^2 - 2x + 8 & \\ \underline{-6x^2} & \end{array} \quad (3x^2 + x - 4)(x - 2) = \dots\dots\dots$$

.....

.....

.....

$$2) \begin{array}{r|l} 2x^4 - x^3 - 7x^2 + 2x + 6 & x^2 - 2 \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

.....

.....

.....

- 7 Найти частное и остаток при делении многочленов, результат проверить по формуле деления:

$$1) \begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 3 \\ - x^3 + 3x^2 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{r} x^2 + 3x \\ x \end{array} \right|$$

$$2) \begin{array}{r} 4x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 8x \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{r} 2x^3 + 4 \end{array} \right|$$

- 8 Выяснить, при каком значении a выполняется деление многочленов нацело:

$$1) \begin{array}{r} 6x^3 + 3x^2 + a \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{r} 2x + 1 \end{array} \right|$$

$$2) \begin{array}{r} 4x^4 - 4x^2 + a - 3 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{r} x^2 - 1 \end{array} \right|$$

Ответ. $a =$

Ответ. $a =$

- 9 Найти такой многочлен $Q(x)$, чтобы при делении многочлена $x^3 - 2x^2 + 4x$ на $Q(x)$ частное было равно $x - 2$ и остаток был равен $x + 6$.

По формуле деления $x^3 - 2x^2 + 4x =$,
откуда

Ответ. $Q(x) =$

III

10 Написать формулу деления многочленов:

$$1) \ x^3 - 3x^2 - 5x + 15 \mid x^2 - 5$$

.....

.....

.....

О т в е т. $x^3 - 3x^2 - 5x + 15 =$

$$2) \ 2x^4 + x^2 - 6 \mid 2x^2 - 3$$

.....

.....

.....

О т в е т. $2x^4 + x^2 - 6 =$

$$3) \ 3x^4 + 2x^2 - 1 \mid x^2 + 2$$

.....

.....

.....

О т в е т. $3x^4 + 2x^2 - 1 =$

$$4) \ 2x^5 - x^3 - x + 3 \mid 2x^3 - 3x$$

.....

.....

.....

О т в е т. $2x^5 - x^3 - x + 3 =$



§ 2. Решение алгебраических уравнений

I

1 Решить уравнение:

1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$,

2) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$,

.....

.....

.....

2 Разложить на множители многочлен:

1) $2x^3 - 5x^2 - 3x$

2) $x^4 + 3x^2 - 4$

.....

3 Выполнить деление многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:

1) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 2$,
 $Q(x) = x - 2$.

2) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5$,
 $Q(x) = x^2 - 3x + 5$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 4 Найти целые корни многочлена $P(x)$, если:

$$P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2.$$

Делителями числа -2 являются числа $1, -1, 2, -2$, проверяем:
 $P(1) = 0, P(-1) = -4 \neq 0, P(2) = 20 \neq 0, P(-2) = 0.$

Ответ. $x_1 = 1, x_2 = -2.$

1) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3.$

2) $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4.$

Ответ.

- 5 Используя результат упражнения 4, разложить на множители многочлен $P(x)$.

Многочлен $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ делится нацело на многочлен $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$, так как его целыми корнями являются числа 1 и -2 (см. упражнение 4).

Разделим многочлен $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ на многочлен $x^2 + x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 & x^2 + x - 2 \\ -x^4 + x^3 - 2x^2 & \\ \hline & x^2 + x - 2 \\ & -x^2 + x - 2 \\ & \hline & 0 \end{array}$$

Ответ. $P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+1).$

1) Разделим $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ на многочлен

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 & \\ \hline & \end{array}$$

Ответ. $P(x) =$

2) Разделим $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ на многочлен

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 & \\ \hline & \end{array}$$

Находим корни уравнения

Ответ. $P(x) =$

6 Решить уравнение $P(x) = 0$, если:

1) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$. Находим целый корень: $P(1) =$ $\neq 0$, $P(-1) = 0$, откуда $x_1 = -1$.

Разделим $P(x)$ на $x - x_1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 6x - 8 & \text{.....} \\ \hline & \text{.....} \end{array}$$

.....

.....

.....

.....

Решая квадратное уравнение,

получим $x_{2,3} =$, $x_2 =$, $x_3 =$

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 =$, $x_3 =$

2) $P(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24$. Находим два целых корня:

$P(1) =$ $\neq 0$. $P(-1) =$, $P(2) =$, $P(-2) =$,

откуда $x_1 =$, $x_2 =$

Сведём решение уравнения $P(x) = 0$ к решению квадратного уравнения делением $P(x)$ на многочлен $(x - x_1)(x - x_2) =$

$=$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24 & \text{.....} \\ \hline & \text{.....} \end{array}$$

.....

.....

.....

.....

Решая квадратное уравнение,

получим $x_{3,4} =$, $x_3 = x_1 =$, $x_4 =$

Ответ. $x_1 =$, $x_2 =$, $x_3 =$

- 7 Найти действительные корни уравнения $P(x) = 0$, если:

$P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$. Находим целый корень. $\quad \quad \quad) = \dots\dots\dots$

$P(-1) = \dots\dots\dots$, $P(2) = \dots\dots\dots$, откуда $x_1 = \dots\dots\dots$.

Выполняем деление $P(x)$ на $x - \bullet$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - x - 2 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

Уравнение $\dots\dots\dots$ действительных корней не имеет.

Ответ. $x = \dots\dots\dots$.

- 8 Сократить дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, если: $P(x) = x^3 - x + 6$, $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$.

Находим целый корень числителя: $P(1) = \dots\dots\dots$, $P(-1) = \dots\dots\dots$,

$P(2) = \dots\dots\dots$, $P(-2) = \dots\dots\dots$, $x_1 = \dots\dots\dots$.

Выполняем деление $P(x)$ на $x - x_1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x + 6 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$P(x) = \dots\dots\dots$.

Находим целый корень знаменателя: $Q(1) = \dots\dots\dots$, $x_1 = \dots\dots\dots$.

Выполняем деление $Q(x)$ на $x - x_1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 5x - 3 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$Q(x) = \dots\dots\dots$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \dots\dots\dots$

III

- 9 Разложить на множители многочлен $P(x)$ и найти его действительные корни, если $P(x) = x^3 - 2x - 4$. Находим целый корень:

$$P(1) = \dots, \quad P(-1) = \dots, \quad P(2) = \dots, \quad x_1 = \dots;$$

разделим $P(x)$ на $x - x_1 = \dots$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x - 4 & \dots \\ \hline \dots & \dots \end{array}$$

.....

.....

.....

.....

Уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $P(x) = \dots$, $x = \dots$.

- 10 Решить уравнение $P(x) = 0$, если:

1) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Находим целый корень: $P(1) = \dots$, $x_1 = \dots$; разделим $P(x)$ на $x - x_1 = \dots$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & \dots \\ \hline \dots & \dots \end{array}$$

.....

.....

.....

.....

Решая уравнение,

.....

получим $x_2 = \dots$, $x_3 = \dots$.

Ответ. $x_1 = \dots$, $x_2 = \dots$, $x_3 = \dots$.

2) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$. Находим два целых корня:

$$P(1) = \dots, \quad P(-1) = \dots, \quad P(2) = \dots, \quad P(-2) = \dots,$$

$$x_1 = \dots, \quad x_2 = \dots; \quad \text{разделим } P(x) \text{ на многочлен}$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = \dots:$$

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6 \quad | \quad \begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{.....} \end{array}$$

Решая уравнение,

находим $x = \dots$ или $x = \dots$.

Ответ. $x_1 = \dots$, $x_2 = \dots$, $x_3 = \dots$.

§ 3. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим

1

1 Свести к квадратному и решить уравнение:

1) $x(2x + 7) = 2(x + 1) - x^2$,

2) $x(3x - 7) + 1 = 2(x^2 - 3) + x$,

Ответ.

Ответ.

2 Решить уравнение:

1) $\frac{4}{x+3} - \frac{3}{x-2} = 3$. Умножив уравнение на общий знаменатель дробей, равный $(x+3)(x-2)$, получим

При найденных значениях x знаменатели исходного уравнения не обращаются в нуль.

Ответ. $x_1 = \dots\dots\dots$, $x_2 = \dots\dots\dots$.

2) $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{3}{x} = \frac{2-x}{x-1}$. Умножим уравнение на общий знаменатель дробей $\dots\dots\dots$, получим $\dots\dots\dots$

При $x_1 = \dots\dots\dots$ знаменатели двух дробей исходного уравнения равны нулю, при $x_2 = \dots\dots\dots$ знаменатели дробей не равны нулю.

Ответ. $x = \dots\dots\dots$.

II

3 Свести к алгебраическому и найти корни уравнения:

1) $(x-1)(x^2-2) = 5-x(2x-1)$. $\dots\dots\dots$

Разложим левую часть полученного уравнения на множители способом группировки: $\dots\dots\dots$

2) $x^2(x^2+3) = 6+x(1-3x^2)$. $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ Находим целые корни полученного уравнения, обозначив $P(x)$ его левую часть, и проверяем: $P(1) = \dots\dots\dots$, $P(-1) = \dots\dots\dots$, $P(2) = \dots\dots\dots$, $P(-2) = \dots\dots\dots$, $x_1 = \dots\dots\dots$, $x_2 = \dots\dots\dots$.

Разделим $P(x)$ на многочлен $(x-x_1)(x-x_2) = \dots\dots\dots$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 & \dots\dots\dots \\ \hline & \dots\dots\dots \end{array}$$

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

Уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $x_1 = \dots$, $x_2 = \dots$.

4 Найти действительные корни возвратного уравнения

$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Нуль не является корнем уравнения, поэтому уравнение можно разделить на x^2 , получив

$x^2 - 3x + 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Сделаем замену $x + \frac{1}{x} = t$, тогда

$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$, $t^2 - 2 - 3t + 2 = 0$,

$t^2 - 3t = 0$; $x + \frac{1}{x} = 0$ или $x + \frac{1}{x} = 3$. Уравнение $x + \frac{1}{x} = 0$

не имеет действительных корней, уравнение $x + \frac{1}{x} = 3$,

$x^2 - 3x + 1 = 0$ имеет корни $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$.

Ответ. $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

1) $x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$. Нуль не является корнем уравнения, поэтому уравнение можно разделить на x^2 ,

Сделаем замену $x - \frac{1}{x} = t$, тогда

Ответ. $x_{1,2} = \dots$, $x_{3,4} = \dots$.

5 Решить уравнение:

1) $\frac{x^2}{2x-3} + \frac{x}{x-2} = \frac{2(x+1)}{(x-2)(2x-3)}$. Умножим уравнение на общий

знаменатель $(x-2)(2x-3)$ дробей, получим

Находим целый корень полученного уравнения, в правой части которого записан 0, обозначив $P(x)$ его левую часть:

$P(1) = \dots$, $P(-1) = \dots$, $P(2) = \dots$, $P(-2) = \dots$,

$x_1 = \dots$. Разделим $P(x)$ на $x - x_1$:

$$x^3 - 5x - 2 \quad | \quad \begin{array}{l} \hline \dots\dots\dots \\ \hline \dots\dots\dots \end{array}$$

.....

.....

.....

.....

Решая уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$, находим $x_{2,3} = \dots\dots\dots$.
При найденных значениях x знаменатели исходного уравнения не равны нулю.

Ответ. $x_1 = \dots\dots\dots$, $x_{2,3} = \dots\dots\dots$.

2) $\frac{x^3}{x-3} + \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-3}{(x-3)(x-1)}$. Умножим уравнение на общий

знаменатель дробей:

.....

Решим полученное уравнение:

.....

.....

.....

При $x = \dots\dots\dots$ знаменатели двух дробей исходного уравнения равны нулю, т. е. $x = \dots\dots\dots$ — посторонний корень.

Ответ. $x_1 = \dots\dots\dots$, $x_{2,3} = \dots\dots\dots$.

III

6 Решить уравнение:

$$x^2(x+2)+2=2x(x+1)+3x, \quad \dots\dots\dots$$

.....

.....

.....

Преобразовав уравнение ,
находим целый корень, обозначив $P(x)$ его левую часть (правая
часть равна 0): $P(1) = \dots\dots\dots$, $P(-1) = \dots\dots\dots$, $P(2) = \dots\dots\dots$,
 $x_1 = \dots\dots\dots$. Разделим $P(x)$ на $x - x_1$:

$$x^3 - 5x + 2 \quad | \quad \begin{array}{l} \text{.....} \\ \hline \text{.....} \end{array}$$

Находим корни квадратного уравнения

$$x_{2,3} = \dots\dots\dots$$

Ответ. $x_1 = \dots\dots\dots$, $x_{2,3} = \dots\dots\dots$.

7 Решить рациональное уравнение:

$$1) \frac{x^2}{1-x} + \frac{5}{x+2} = \frac{11}{(1-x)(x+2)}. \text{ Умножим уравнение на общий}$$

знаменатель дробей, получим

Находим целый корень полученного уравнения, обозначив $P(x)$

его левую часть: $P(1) = \dots\dots\dots$, $P(-1) = \dots\dots\dots$, $x_1 = \dots\dots\dots$.

Разделим $P(x)$ на $x - x_1$:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \quad | \quad \begin{array}{l} \text{.....} \\ \hline \text{.....} \end{array}$$

Решим уравнение, получим

..... При найденных значениях x знаменатели дробей исходного уравнения не равны нулю.

Ответ. $x_1 = \dots\dots\dots$, $x_2 = \dots\dots\dots$, $x_3 = \dots\dots\dots$.

$$2) \frac{x^3}{x+3} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-3}{(x+3)(x+1)}. \text{ Умножим уравнение на общий}$$

знаменатель дробей, получим

Решим полученное уравнение,

..... . При $x = \dots\dots\dots$ знаменатели двух дробей исходного уравнения равны нулю, т. е. $x = \dots\dots\dots$ — посторонний корень.
 Ответ. $x_1 = \dots\dots\dots$, $x_{2,3} = \dots\dots\dots$.



§ 4. Системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными

Ⓘ

1 Выразить y через x из равенства:

1) $2x + 3y = 4$,

2) $6x^2 - xy - y^2 = 0$,

.....

2 Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 7y + 19 = 0, \\ -4x + 3y + 17 = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 7y + 19 = 0, \\ -4x + 3y + 17 = 0. \end{cases} \cdot 4$$

$$+ \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

....., откуда $y = \dots\dots\dots$.
 Подставляя это значение в первое уравнение исходной системы, получим $x + 7 \cdot (\dots\dots\dots) + 19 = 0$, откуда $x = \dots\dots\dots$.
 Ответ. $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$.

Ⓟ

3 Решить способом подстановки систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы, выразив y через x , получим $y = x - 2$. Далее $x(x - 2) = 8$; $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x_1 = 4$, $y_1 = 2$, $x_2 = -2$, $y_2 = -4$.

Ответ. $(4; 2)$, $(-2; -4)$.

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 54. \end{cases}$ Из первого уравнения, выразив y через x ,

получим $y = \dots$. Подставив выражение для y во второе уравнение, получим $\dots$

$x^2 = \dots$, $x_1 = \dots$, $y_1 = \dots$, $x_2 = \dots$, $y_2 = \dots$.

Ответ. $\dots$

2) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ x + y = 7. \end{cases}$ $y = \dots$, $2x^2 - \dots = 2$, $\dots$

$\dots$, $x_1 = \dots$, $y_1 = \dots$, $x_2 = \dots$, $y_2 = \dots$.

Ответ. $\dots$

4 Способом сложения решить систему уравнений:

$\begin{cases} x + y - 3xy = 7, \\ 2x - y + 3xy = -1. \end{cases}$ Складывая уравнения системы, находим $3x = 6$, откуда $x = 2$. При этом значении x из первого уравнения находим y : $2 + y - 6y = 7$, $5y = -5$, $y = -1$.

Ответ. (2; -1).

1) $\begin{cases} x + 2y - 4xy = 5, \\ 2x + y - 4xy = 8. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, по-

лучим $\dots$, откуда $y = \dots$. Подставляя это выражение для y в первое уравнение системы, получим $\dots$

Ответ. $\dots$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -2. \end{cases}$ Прибавляя к первому уравнению второе, умно-

женное на 2, получим $(x + y)^2 = \dots$, откуда $y = \dots$ или $y = \dots$. Подставляя эти выражения для y во второе уравнение системы, находим $\dots$

$x_1 = \dots$, $y_1 = \dots$, $x_2 = \dots$, $y_2 = \dots$, $x_3 = \dots$, $y_3 = \dots$, $x_4 = \dots$, $y_4 = \dots$.

Ответ. $\dots$

III

5 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy = -2, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$

....., $x_1 = \dots\dots\dots$,

$y_1 = \dots\dots\dots$, $x_2 = \dots\dots\dots$, $y_2 = \dots\dots\dots$.

2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x - 2y = 7, \end{cases}$

Ответ.

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, умно-

женное на 2, получим

Если $y = \dots\dots\dots$, то из второго уравнения системы

....., $x_1 = \dots\dots\dots$, $y_1 = \dots\dots\dots$,

$x_2 = \dots\dots\dots$, $y_2 = \dots\dots\dots$; если $y = \dots\dots\dots$, то

Ответ.

§ 5. Различные способы решения систем уравнений

I

1 Выяснить, какая из пар чисел $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; -2)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 2y^2 = 19, \\ 2x^2 - y^3 + 3xy = 8. \end{cases}$$

Ответ.

- 2 Разделить уравнение $8x^3 - y^3 = 6$ на уравнение $2x - y = 3$.

.....
Ответ.

- 3 При $x \neq 2y$ выразить x через y из уравнения $\frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = \frac{2y-x}{3}$.

.....
.....

- 4 Решить относительно y уравнение $2y^2 + 7ay - 4a^2 = 0$.

.....
Ответ. или

II

- 5 Решить систему уравнений:

$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -8. \end{cases}$ По теореме, обратной теореме Виета, искомые числа являются корнями уравнения $z^2 - 2z - 8 = 0$, $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8}$, $z_1 = 4$, $z_2 = -2$.

Ответ. $(4; -2)$, $(-2; 4)$.

- 1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$ Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, то из второго уравнения,

используя первое, получаем По теореме, обратной теореме Виета:

Ответ.

- 2) $\begin{cases} 2x^2 + 5xy + y^2 = 4, \\ x^2 + 5xy + y^2 = 4. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, на-

ходим $x = \dots$, при этом значении x из первого уравнения находим $y = \dots$.

Ответ.

- 3) $\begin{cases} y^3 + 2xy - 4x + 4 = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$ Из второго уравнения находим

$x = \dots$, подставляя которое в первое уравнение, получаем

откуда $y_1 = \dots$, $y_{2,3} = \dots$, $x_1 = \dots$, $x_{2,3} = \dots$.
Ответ. $\dots$

6 Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 3, \\ x^2 + 3xy - y^2 = 3. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе,

получаем $y = \pm \dots$. При $y = \dots$ из первого уравнения системы находим $x_{1,2} = \dots$, $y_{1,2} = \dots$. Если $y = \dots$, то первое уравнение системы не имеет действительных корней.

Ответ. $\dots$

2) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}. \end{cases}$ При $x \neq 0$, $y \neq 0$ из второго уравнения системы

получаем $\dots$

Ответ. Действительных решений $\dots$

3) $\begin{cases} x^3 - 4y^2 + 6xy + 5 = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$ Выразим из второго уравнения y че-

рез x , получим $\dots$ и подставим в первое уравнение

Обозначив $P(x)$ левую часть полученного уравнения, найдём его целые корни: $P(1) = \dots$, $P(-1) = \dots$, $x_1 = \dots$. Разделим $P(x)$ на $x - x_1$:

Уравнение $\dots$ не имеет действительных корней.

Ответ. $\dots$

7 Решить систему уравнений:

- 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ 2x + 2\sqrt{xy} + y = 34. \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое, возведённое в квадрат (учитывая, что $x \geq 0, y \geq 0$):

$x = \dots, y = \dots$.

Ответ.

- 2) $\begin{cases} x - 2y = 2, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}. \end{cases}$ Из второго уравнения следует, что $\frac{x}{y} > 0$.

Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$, тогда $\dots, t_1 = \dots,$

$t_2 = \dots$. Если $t_1 = \dots$, то $x = \dots$, и из первого уравнения системы находим $\dots$

$y_1 = \dots, x_1 = \dots$; если $t_2 = \dots$, то $\dots, y_2 = \dots, x_2 = \dots$.

Ответ.

8 Решить систему уравнений:

- 1) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ \frac{1}{2y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6}. \end{cases}$

Ответ.

- 2) $\begin{cases} \frac{2x+y}{2x-y} = 3, \\ xy = 1. \end{cases}$

Ответ.

III

9 Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 4y = 3, \\ x^2y = 1. \end{cases}$

.....

Ответ.

2) $\begin{cases} x^2y - x^3y = 6, \\ y - xy = 6. \end{cases}$

.....

.....

Ответ.



§ 6. Решение задач с помощью систем уравнений

I

1 Записать формулой предложение:

1) удвоенное произведение чисел a и b больше их суммы на единицу

2) сумма кубов чисел x и y в три раза больше их суммы

.....

2 Составить систему уравнений по условиям задачи:

1) Разность произведения чисел x и y и числа x равна нулю, сумма этого произведения и числа y равна 4:

$$\begin{cases} \\ \end{cases}$$

2) Сумма натуральных чисел x и y равна 4, а сумма обратных к ним чисел равна $\frac{4}{3}$:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

II

3 Решить систему уравнений, полученную в задании 2.

1) $\dots\dots\dots$

$$x_1 = \dots\dots\dots, y_1 = \dots\dots\dots, x_2 = \dots\dots\dots, y_2 = \dots\dots\dots$$

2) $\dots\dots\dots$

$$x_1 = \dots\dots\dots, y_1 = \dots\dots\dots, x_2 = \dots\dots\dots, y_2 = \dots\dots\dots$$

4 Бассейн может наполняться водой из двух кранов. Если первый кран будет открыт в течение 10 мин, а второй — в течение 20 мин, то бассейн будет наполнен целиком. Если первый кран будет открыт в течение 5 мин, а второй — в течение 15 мин, то заполнится $\frac{3}{5}$ бассейна. Сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности?

Решение. Введём обозначения: V — объём $\dots\dots\dots$,
 x — часть V , заполняемая первым краном за 1 мин, y —
 $\dots\dots\dots$, тогда $\frac{V}{x} = \dots\dots\dots$,

$$\frac{V}{y} = \dots\dots\dots. \text{ По условию задачи } \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

Ответ. $\dots\dots\dots$ мин.

5 Расстояние между пристанями A и B равно 60 км. Катер на один рейс от A до B и обратно тратит 5 ч. На путь от A до B по течению реки катер тратит на 1 ч меньше, чем от B до A . Найти собственную скорость катера и скорость течения реки.

Решение. Пусть x км/ч — собственная ,
 y км/ч — , тогда вре-
 мя движения катера по течению , а против те-
 чения

По условию задачи составим систему $\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$

..... ,
 ,
 ,

находим $x = \dots$, $y = \dots$.

Ответ. км/ч, км/ч.

III

- 6 Сумма двух чисел равна 5, а произведение этих чисел больше их разности на 5. Найти эти числа.

Решение. Пусть x, y — По усло-
 вию задачи составим систему $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 5, \\ \end{array} \right.$, решим её спосо-

бом подстановки:

Ответ.

- 7 Один катет прямоугольного треугольника на 2 см больше друго-
 го, гипотенуза треугольника равна 10 см. Найти катеты.

Решение. Пусть x, y — катеты, $x > y$. По условию задачи и
 теореме Пифагора составим систему $\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$,

..... . Так как $y > 0$, то $y = \dots$, $x = \dots$.

Ответ.

Степень с рациональным показателем

§ 7. Степень с целым показателем

①

1 Вычислить:

1) $3^3 = \dots$; 2) $(-7)^3 = \dots$;

3) $10^6 = \dots$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \dots$;

5) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \dots$; 6) $\left(1\frac{2}{3}\right)^5 = \dots$;

7) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^4 = \dots$; 8) $(0,1)^6 = \dots$;

9) $1^{101} = \dots$; 10) $0^{10} = \dots$.

2 Заполнить пропуски:

1) если $x = 7$, то $x^4 = \dots$, $(-x)^4 = \dots$, $-x^4 = \dots$;

2) если $x = 5$, то $x^3 = \dots$, $(-x)^3 = \dots$, $-x^3 = \dots$;

3) если $x = -3$, то $x^4 = \dots$, $(-x)^4 = \dots$, $-x^4 = \dots$;

4) если $x = -3$, то $x^3 = \dots$, $(-x)^3 = \dots$, $-x^3 = \dots$.

3 Сравнить с нулём:

1) $(0,01)^{43} \square 0$; 2) $(-0,1)^{43} \square 0$.

4 Сравнить с единицей:

1) $(3,07)^{101} \square 1$; 2) $(0,307)^{101} \square 1$.

5 Заполнить пустые клетки так, чтобы равенство было верным:

1) $2 \square = 8$; 2) $3 \square = 81$; 3) $(-4) \square = 256$; 4) $(-5) \square = -125$.

6 Сравнить числа, заполнив пустые клетки знаком $>$ или $<$.

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \square \left(\frac{3}{4}\right)^3$; 2) $\left(-\frac{2}{5}\right)^5 \square \left(-\frac{2}{5}\right)^6$;

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \square \left(\frac{4}{3}\right)^2$; 4) $(-0,2)^3 \square (-0,1)^2$.

7 Записать в стандартном виде числа:

- 1) $3451,2 = 3,4512 \cdot 10^{\square}$; 2) $423,7 = \dots\dots\dots$;
3) $0,021 = 2,1 \cdot 10^{\square}$; 4) $0,0055 = \dots\dots\dots$.

8 Заполнить пустые клетки так, чтобы равенства были верными:

- 1) $x^5 \cdot x^{\square} = x^{18}$; 2) $x^{17} : x^{\square} = x^4$;
3) $(x^5)^{\square} = x^{35}$; 4) $x^{\square} \cdot y^{\square} = (xy)^5$.

9 Вписать в скобки делители так, чтобы выполнялось равенство

$$x^{15} : (\dots\dots\dots) \cdot x^2 : (\dots\dots\dots) = x^{12}.$$

10 В клетки вписать знаки арифметических действий, которые приведут к данному результату:

$$a^2 \square a^6 \square a^3 \square a^4 = a^9.$$

11 Вписать пропущенный одночлен стандартного вида:

- 1) $\dots\dots\dots \cdot (2x^2y^3) = 8x^4y^5$;
2) $\left(\frac{1}{3}a^5m^2n\right) \cdot \dots\dots\dots = -a^6m^2n^3$.

12 Записать в виде степени с натуральным показателем:

- 1) $\frac{7^8 \cdot 7^3}{7^{13}} = \square^2$; 2)* $\frac{3^4 \cdot 2^{\square}}{2 \cdot 6^6} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\square}$.

II

13 Записать в пустую клетку показатель степени так, чтобы равенство было верным:

- 1) $\frac{1}{2^4} = 2^{\square}$; 2) $\frac{1}{3^{\square}} = 3^{-5}$; 3) $\frac{1}{8} = 2^{\square}$; 4) $\frac{1}{9^2} = 3^{\square}$.

14 Даны числа

$$16^{-1}; \quad 0,1^{-2}; \quad 0,001^{-3}; \quad 1,3^{-2}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}; \quad 2^{-7}; \quad 1,0001^{-1}; \quad 75^0.$$

Подчеркнуть те из них, которые меньше 1.

15 Заполнить пустые клетки так, чтобы равенство было верным:

- 1) $\frac{3}{x^{\square}y^{\square}} = 3x^{-3}y^{\square}$; 2) $(a+b)^{\square} = \frac{1}{\frac{\square}{2}}$;

$$3) \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^{\square}} = \square^{-3} + y^{-2};$$

$$4) \frac{a^3}{b^{\square} \square^2} = a^{\square} \square^{-3} c^{\square}.$$

- 16** Заполнить пропуски в формулировке и доказательстве свойства степени:

Для любого $a^{\square}$ и любых $\square$ n и m справедливо равенство

$$a^n : a^m = a^{\square}.$$

Пусть n и m — целые отрицательные числа. Тогда $n = \square l$, $m = \square k$, где l и k $\square$ числа. По определению степени $\square$ верно.

$$a^n : a^m = a^{\square} : a^{\square} = (\square)^l : (\square)^k.$$

Применяя свойство степени с натуральным показателем для l и k , получаем $\left(\frac{1}{a}\right)^l : \left(\frac{1}{a}\right)^k = \left(\frac{1}{a}\right)^{\square}$, что по определению степени с $\square$ равно $\square^{k-l} = a^{-m+k}$, так как $m = -k$, $n = \square$. Следовательно, верно равенство $a^n : a^m = a^{n-m}$.

- 17** Записать в виде степени результат выполнения действий, заполняя пропуски:

$$5^9 : 5^2 \cdot 5^{-4} = 5^{9-2+(-4)} = 5^3.$$

- 1) $7^{-2} \cdot 7^3 : 7^{-8} = 7^{-2+\square} = 7^{\square};$
- 2) $2^{12} : 2^{-5} \cdot 2^{-7} = 2^{\square} = 2^{\square};$
- 3) $(4^3)^{-2} \cdot 4^3 = 4^{\square} \cdot 4^3 = 4^{\square} = 4^{\square};$
- 4) $(7^{-6})^{-3} : 7^{-7} = 7^{(-6) \cdot \square} = 7^{\square}.$

- 18** Заполняя пропуски, выполнить действия и записать результат в стандартном виде:

- 1) $4,32 \cdot 10^4 \cdot 2,1 \cdot 10^{-3} = \square \cdot 10;$
- 2) $7,32 \cdot 10^4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-8} = \square \cdot 10^{\square} = \square;$
- 3) $12,3 \cdot 10^{-7} : 3 \cdot 10^{-3} = \square \cdot 10^{\square};$
- 4) $1,05 \cdot 10^{-3} : 3 \cdot 10^{-7} = \square \cdot 10^{\square} = \square.$

- 19** Заполняя пропуски, выполнить действия:

$$1) (3a^{-2})^3 \cdot \left(\frac{a^{-1}}{3^{-2}}\right)^{-2} = 3^3 \cdot a^{\square} \cdot \frac{a^{\square}}{3^{\square}} = 3^{3-\square} \cdot a^{\square+\square} = 3^{\square} a^{\square} = \frac{1}{\square};$$

$$2) \left(\frac{a^{-3}}{b^5}\right)^{-2} : (a^3 b^{-2})^{-3} = \frac{a^{\boxed{}}}{b^{\boxed{-10}}} : (a^{-9} \cdot b^{\boxed{}}) = a^{\boxed{}} b^{\boxed{}} : (a^{-9} \cdot b^{\boxed{}}) =$$

$$= a^{\boxed{}} b^{\boxed{}} = a^{\boxed{}} b^{\boxed{}};$$

20 Вычислить:

$$5^{-3} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot 625 = 5^{-3} : 5^2 \cdot 5^4 = 5^{-3-2+4} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$$

$$1) ((-18)^5)^{-5} : ((-18)^{-4})^6 - 3^{-2} = (-18)^{\boxed{}} : (-18)^{\boxed{}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\boxed{}} =$$

$$= (-18)^{\boxed{}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\boxed{}} = (-18)^{\boxed{}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\boxed{}} = -\boxed{} - \boxed{} = \dots\dots\dots;$$

$$2) (8^3)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{1}{8}\right)^3\right)^{-3} : (64)^{-1} = 8^{\boxed{}} \cdot 8^{\boxed{}} : \boxed{}^{-2} = 8^{\boxed{}} = 8^{\boxed{}} = \dots\dots\dots$$

21 Упростить выражение:

$$1) (2x + 3x^{-1})(3x - 2x^{-1}) + 6x^{-2} = \dots\dots\dots$$

. Ответ. $\dots\dots\dots$

$$2) (x^2 - y^2)(x^{-1} + y^{-1})^{-1}. \quad (x^{-1} + y^{-1})^{-1} = (\dots\dots\dots)^{-1} = (\dots\dots\dots)^{-1} =$$

$$= \dots\dots\dots, (x^2 - y^2) \cdot (\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$$

Ответ. $\dots\dots\dots$

$$3) \frac{(y^{-2} - x^{-2})^{-1} \cdot (xy)^{-2}}{(x - y)^{-2}}. \quad (y^{-2} - x^{-2})^{-1} = (\dots\dots\dots)^{-1} = \dots\dots\dots,$$

$$(xy)^{-2} = \dots\dots\dots, (x - y)^{-2} = \dots\dots\dots$$

. Ответ. $\dots\dots\dots$

III

22 Вычислить:

$$1) 10^{-2} = \dots\dots\dots;$$

$$2) \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \dots\dots\dots;$$

$$3) (8^2)^{-6} \cdot (8^3)^4 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \dots\dots\dots;$$

4) $2,75 \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-3} : (1,5 \cdot 10^{-4}) = \dots\dots\dots$

23 Сравнить с единицей:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-5} = \dots\dots\dots$;

2) $2,745 \cdot 10^{-4} \dots\dots\dots$.

24 Выполнить действия:

1) $\left(\frac{-2,5a^{-2}}{b^3c^{-4}}\right)^{-1} \cdot \frac{10}{bc} = \dots\dots\dots$;

2) $(x^2y^{-2} - 4y^{-2}) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{-2} = \dots\dots\dots$.

§ 8. Арифметический корень натуральной степени.

§ 9. Свойства арифметического корня

I

1 Найти длину стороны квадрата a , если дана его площадь S :

1) $S = 36 \text{ см}^2$, $a = \dots\dots\dots$ см; 2) $S = 121 \text{ см}^2$, $a = \dots\dots\dots$ см;

3) $S = 0,04 \text{ дм}^2$, $a = \dots\dots\dots$ дм; 4) $S = 17 \text{ м}^2$, $a = \dots\dots\dots$ м.

2 Заполнить пропуски в определении арифметического квадратного корня из числа a .

Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется $\dots\dots\dots$ число, $\dots\dots\dots$ которого равен $\dots\dots\dots$.

Краткая запись определения:

$$\sqrt{a} \dots\dots\dots, (\sqrt{a})^2 = \dots\dots\dots.$$

3 Проверить, верно ли равенство:

1) $\sqrt{81} = 9$. 9 $\dots\dots\dots$, $9^2 = \dots\dots\dots$;

- 2) $\sqrt{144} = -12$. -12 , $(-12)^2 =$;
 3) $\sqrt{0,9} = 0,3$. $0,3$, $(0,3)^2 =$

4 Вычислить:

- 1) $\sqrt{16} =$; 2) $\sqrt{100} =$;
 3) $\sqrt{1,21} =$; 4) $\sqrt{0,0004} =$

5 Выяснить, при каких значениях a имеет смысл выражение:

- 1) $\sqrt{3a}$ имеет смысл, если $3a$, т. е. при ;
 2) $\sqrt{a-2}$ имеет смысл, если ≥ 0 , т. е. при ;
 3) $\sqrt{-a}$, если , т. е. при

6 Проверить справедливость неравенств:

- 1) $5 < \sqrt{31} < 6$. $5 = \sqrt{\quad}$, $6 = \sqrt{\quad}$, $\sqrt{\quad} < \sqrt{31} < \sqrt{\quad}$;
 2) $7 < \sqrt{61} < 8$

7 Вычислить:

- 1) $(\sqrt{3} + 1)(1 - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)(\quad) - 2\sqrt{3} =$;
 2) $(18 - 3\sqrt{2})^2 + 108\sqrt{2} =$;
 3) $\sqrt{5^4} - 2\sqrt{5^3} + (5 + \sqrt{5})^2 =$

8 Упростить выражение ($a > 0$, $b > 0$):

- 1) $\sqrt{8a^3b^2} : \sqrt{2ab^2} =$;
 2) $\sqrt{50a^3} - \sqrt{2a^3} =$

9 Сравнить числа:

- 1) $5\sqrt{6}$ и $6\sqrt{5}$. $5\sqrt{6} = \sqrt{\quad} =$, $6\sqrt{5} = \sqrt{\quad} =$,
 , значит, $5\sqrt{6} \square 6\sqrt{5}$;
 2) $\sqrt{17}$ и $3\sqrt{3}$. $3\sqrt{3} =$, значит, $\sqrt{17} \square 3\sqrt{3}$.

10 Сократить дробь:

$$\frac{a - \sqrt{7}}{7 - a^2} = \dots$$

11 Упростить выражение $(x - 5) \sqrt{\frac{1}{x^2 - 10x + 25}}$, заполняя пропуски:

1) при $x > 5$; 2) при $x < 5$.

$$(x - 5) \cdot \sqrt{\frac{1}{(\dots)^2}} = (x - 5) \cdot \dots$$

1) При $x > 5$ имеем $|\dots| = \dots$, т. е.

$$(x - 5) \cdot \frac{1}{\dots} = \dots;$$

2) при $x < 5$ имеем $|\dots| = \dots$, т. е.

Ответ. 1) 1; 2) -1.

II

12 Заполнить таблицу:

1)

x	0	1	8	27	64	125	216
$\sqrt[3]{x}$			2				

2)

x	0	1	16	81	256	625	1296
$\sqrt[4]{x}$					4		

13 Заполнить пропуски в определении арифметического корня натуральной степени.

Определение. Арифметическим корнем натуральной степени n из числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого

Если $a \geq 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = \dots$, $\sqrt[n]{a^n} = \dots$.

14 Доказать, что $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$.

Так как $\square > 0$ и $\square^3 = \dots$, то

15 Вычислить: $\sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{2^4} = 2$.

1) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\square^3} = \dots$;

2) $\sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{\square^6} = \dots$;

3) $\sqrt[3]{(-1000)} = \sqrt[3]{\square^3} = -\sqrt[3]{\square^3} = \dots$.

16 Решить уравнение:

$$x^3 = 125, \quad x = \sqrt[3]{125}, \quad x = \sqrt[3]{5^3}, \quad x = 5.$$

1) $x^4 = 10\,000$, $x^4 = \sqrt[4]{\dots} = \sqrt[4]{\square^4}$, $x = \dots$;

2) $x^5 = -\frac{1}{32}$, $x^5 = \sqrt[5]{\dots} = \sqrt[5]{\square^5} = -\sqrt[5]{\square^5}$, $x = \dots$;

3) $x^4 = -16$, $\sqrt[4]{\dots}$, $\dots < 0$, следовательно, $\dots$.

17 Закончить фразу.

1) Выражение $\sqrt[4]{x-2}$ имеет смысл при $\dots$.

2) Выражение $\sqrt[3]{x-2}$ имеет смысл при $\dots$.

3) Выражение $\sqrt[5]{3+x}$ имеет смысл при $\dots$.

4) Выражение $\sqrt[6]{x+5}$ имеет смысл при $\dots$.

5) Выражение $\sqrt[4]{x^2-6x+9}$ имеет смысл при $\dots$.

6)* Выражение $\sqrt[4]{4x-x^2-10}$ $\dots$.

18 Вычислить, используя свойства арифметического корня:

$$\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} = 5.$$

1) $\sqrt[4]{18 \cdot 72} = \sqrt[4]{2 \cdot \dots \cdot 9 \cdot \dots} = \sqrt[4]{\square^4 \cdot \square^4} = \dots$;

2) $\sqrt[4]{3} : \sqrt[4]{1875} = \sqrt[4]{\frac{3}{\dots}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\dots}} = \sqrt[4]{\square^4} = \dots$;

3) $\sqrt[3]{12 \frac{19}{27}} = \sqrt[3]{\frac{\dots}{27}} = \sqrt[3]{\square^3} = \dots = \dots$;

$$4) \sqrt{\sqrt{81}} - \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} = \dots - \dots = \dots$$

Можно вычислить другим способом:

$$\sqrt{\sqrt{81}} - \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{3^4} - \sqrt[4]{2^4} = 3 - 2 = 1.$$

19* Заполняя пропуски, разложить на множители по формулам сокращённого умножения:

$$1) \sqrt{a} - \sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} \right)^2 - \left(\sqrt[4]{b} \right)^2 = (\dots) \cdot (\dots);$$

$$2) a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\dots - \sqrt[3]{ab} + \dots);$$

$$3) \sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b} = (\dots)^2.$$

20* Сократить дробь:

$$1) \frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \dots;$$

$$2) \frac{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dots$$

III

21 Вычислить:

$$1) \sqrt[4]{625} = \dots;$$

$$2) \sqrt[3]{-216} = \dots;$$

$$3) \sqrt[4]{32 \cdot 8} + \sqrt[3]{\frac{162}{6}} = \dots$$

22 Решить уравнение:

$$1) x^4 = 625, x = \dots, x = \dots;$$

$$2) x^3 = -27, x = \dots, x = \dots$$

23 Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение:

$$1) \sqrt[4]{3-x} \dots;$$

$$2) \sqrt[5]{x^2-3} \dots$$

§ 10. Степень с рациональным показателем.

§ 11. Возведение в степень числового неравенства

I

1 Вычислить:

$$1) \sqrt[4]{0,0625} = \sqrt[4]{\boxed{}}^4 = \dots\dots\dots;$$

$$2) \sqrt[3]{-343} = -\sqrt[3]{\boxed{}}^3 = \dots\dots\dots;$$

$$3) \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{((3)\boxed{})^3} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots;$$

$$4) \sqrt[4]{11^8} = \sqrt[4]{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots.$$

2 Закончить фразу.

1) Выражение a^n , где n — любое натуральное число, имеет смысл при $\dots\dots\dots$.

2) Выражение a^p , где p — отрицательное число, имеет смысл при $\dots\dots\dots$.

3) Выражение 0^p имеет смысл при $\dots\dots\dots$.

3 Выполнить умножение неравенств:

$$1) \begin{array}{l} \times \quad 3 < 5 \\ \hline 17 < 19 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{l} \times \quad 10 > 7 \\ \hline 3,5 > 2 \end{array}$$

$$3) \begin{array}{l} \times \quad 3 < 5 \\ \times \quad 3 < 5 \\ \hline 3 < 5 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{l} \times \quad a > b \\ \times \quad a > b \\ \times \quad a > b \\ \hline a > b, \text{ где } a > 0, b > 0. \end{array}$$

4 Выполнить действия:

$$1) 3^{-3} \cdot 3^7 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sqrt{3^4} = \dots\dots\dots$$

$$2) \frac{a^{-3}b^2}{b^{-3}a} \cdot \frac{\sqrt{a^8}}{\sqrt[3]{b^{15}}} = \frac{b^2 \cdot \dots\dots\dots}{a \cdot \dots\dots\dots} \cdot \frac{a^{\boxed{}}}{b^{\boxed{}}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

II

5 Записать в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{a} = \dots\dots\dots$;

2) $\sqrt{b^3} = b^{\boxed{}}$;

3) $\sqrt[4]{x^5} = \boxed{}^{\frac{5}{4}}$;

4) $\sqrt[7]{y^{-2}} = \dots\dots\dots$.

6 Записать в виде корня из степени с целым показателем:

1) $a^{\frac{3}{2}} = \dots\dots\dots$;

2) $b^{-\frac{1}{2}} = \dots\dots\dots$;

3) $(3x)^{-\frac{1}{3}} = \dots\dots\dots$;

4) $(x-2)^{\frac{2}{3}} = \dots\dots\dots$.

7 Заполнить таблицу, используя равенство $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, где $x > 0$:

$x^{\frac{m}{n}}$	$x^{\frac{3}{7}}$		$x^{-\frac{2}{5}}$	$x^{-\frac{1}{6}}$	$x^{\frac{1}{8}}$	$x^{0,2}$
$\sqrt[n]{x^m}$		$\sqrt[10]{x^2}$		$\sqrt[6]{x^{-1}}$		

8 Закончить фразу.

1) Выражение $a^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 0$, имеет смысл при $\dots\dots\dots$

2) Выражение $a^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} < 0$, имеет смысл при $\dots\dots\dots$

3) Выражение a^r , где r — любое рациональное число, имеет смысл при $\dots\dots\dots$.

9 Вычислить:

1) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = \dots\dots\dots$;

2) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$;

3)* $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\boxed{}^2} = \sqrt[3]{(\boxed{}^3)^2} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$;

4)* $32^{0,6} = 32^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\boxed{}^3} = \sqrt[5]{(\boxed{}^5)^3} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$;

5)* $81^{-0,75} = 81^{-\frac{3}{4}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$.

- 10** Заполнить пропуски в записи свойств степени с любым действительным показателем.

Для любых и верны равенства:

- 1) $a^p \cdot a^q = \dots$; 2) $a^p : a^q = \dots$;
 3) $\dots = a^{pq}$; 4) $\dots = a^p b^q$;
 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \dots$.

- 11** С помощью свойств записать в виде степени:

$$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 3^1 = 3.$$

- 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{6}} = \dots$;
 2) $(6^{\frac{7}{12}})^{-3} = 6^{\boxed{}} = \dots$;
 3) $3^{\frac{4}{5}} \cdot 8^{0,8} = 3^{\frac{4}{5}} \cdot 8^{\boxed{}} = \boxed{}^{\frac{4}{5}} = \dots$.

- 12** Разложить на множители:

- 1) $a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \left(\dots \right)$;
 2) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = \left(\dots - \dots \right) \left(\dots + \dots \right)$.

- 13** Сравнить числа:

- 1) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^3$. Так как $\frac{3}{5} \boxed{} \frac{4}{5}$, то $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \boxed{} \left(\frac{4}{5}\right)^3$;
 2) $(7,01)^4$ и $(7,011)^4$. Так как $7,01 \boxed{} 7,011$, то;
 3) $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$. Так как $\frac{7}{9} = \dots$, $\frac{6}{7} = \dots$ и ,
 то $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \boxed{} \left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$;
 4) $\sqrt[3]{0,21}$ и $\sqrt[3]{0,31}$. Так как $\sqrt[3]{0,21} = (0,21)^{\boxed{}}$, $\sqrt[3]{0,31} = (0,31)^{\boxed{}}$ и $0,21 \boxed{} 0,31$, то $\sqrt[3]{0,21} \boxed{} \sqrt[3]{0,31}$.

- 14** Заполнить пропуски в записи правила возведения в степень неравенства.

Если обе части неравенства , то при возведении его в положительную степень знак неравенства , а при возведении в степень знак неравенства меняется

- 15** Сравнить числа:

$(0,44)^{-2}$ и $(0,45)^{-2}$.
Так как $0,44 < 0,45$ и $-2 < 0$, то $(0,44)^{-2} > (0,45)^{-2}$.

1) $(11)^{-3}$ и $(15)^{-3}$. Так как $11 \square 15$ и $-3 \square$, то $(11)^{-3} \square (15)^{-3}$;

2) $(2,45)^{\frac{1}{2}}$ и $(2,47)^{\frac{1}{2}}$. Так как $2,45 \square 2,47$,, то

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{5}{9}\right)^{-\frac{1}{3}}$. Так как $\frac{3}{7} =$, $\frac{5}{9} =$ и $-\frac{1}{3} \square$, то

- 16** Решить уравнение:

1) $4^x = 64$, $4^x = 4^{\square}$, $x =$

2) $2^{2x} = 8^{\frac{2}{5}}$, $2^{2x} = (\square)^{\frac{2}{5}}$, $2^{2x} =$, $2x =$, $x =$

3) $3^{2x} = 27^{\frac{1}{4}}$, $3^{2x} = (\square)^{\frac{1}{4}}$,

4) $5^{x-1} = 25$, $5^{x-1} = \square^2$,, $x =$

Ответ. 1) $x = 3$; 2) $x = 0,6$; 3) $x = \frac{3}{8}$; 4) $x = 3$.

- 17*** Упростить выражение:

1) $\frac{b}{a-b} + \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(\dots)} + \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} =$

$$2) \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} = \dots\dots\dots$$

.....

18* Решить неравенство $(x^2+2)^{\frac{1}{3}} > (2x^2+1)^{\frac{1}{3}}$.

Так как $x^2+2 \square 0$, $\frac{1}{3} \square 0$, то и $(x^2+2)^{\frac{1}{3}} \square 0$.

Так как $2x^2+1 \square 0$, $\frac{1}{3} \square 0$, то и $(2x^2+1)^{\frac{1}{3}} \square 0$.

Возведём обе части неравенства $(x^2+2)^{\frac{1}{3}} > (2x^2+1)^{\frac{1}{3}}$ с положительной левой и правой частями в степень. По свойству 1 (§ 11)

$$x^2+2 \square 2x^2+1, \dots\dots\dots$$

III

19 Вычислить:

1) $32^{\frac{1}{5}} = \dots\dots\dots$;

2) $64^{-\frac{1}{3}} = \dots\dots\dots$;

3) $81^{\frac{3}{4}} = \dots\dots\dots$.

20 Сравнить числа:

1) $(0,48)^{\frac{1}{3}}$ и $(0,048)^{\frac{1}{3}}$. Так как ,
то

2) $(2,3)^{-\frac{1}{2}}$ и $(2,4)^{-\frac{1}{2}}$. Так как ,
то

21 Решить уравнение:

1) $5^{2x} = 125$, $5^{2x} = \dots\dots\dots$;

2) $4^{x-2} = 64$, $4^{x-2} = \dots\dots\dots$.

Ответ. 1) $x = \dots\dots\dots$; 2) $x = \dots\dots\dots$.

Степенная функция

§ 12. Область определения функции

1

- 1 Найти числовое значение каждого из алгебраических выражений при заданном значении a и заполнить таблицу:

a	-2	-1	0	1	1,5	2	3
$x^2 - 1$							
$\sqrt{x^2 - 1}$							
$\frac{1}{x^2 - 1}$	$\frac{1}{3}$	не сущ.	-1	не сущ.	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$
$\sqrt[3]{x^2 - 1}$							

- 2 Функция задана формулой $y(x) = 3x + 1$. Найти:

1) $y(0) = \dots$;
 2) $y(-3) = \dots$;
 3) значения x , при которых $y(x) = 0,5$, $y(x) = -3$.
 $0,5 = \dots$, $-3 = \dots$.

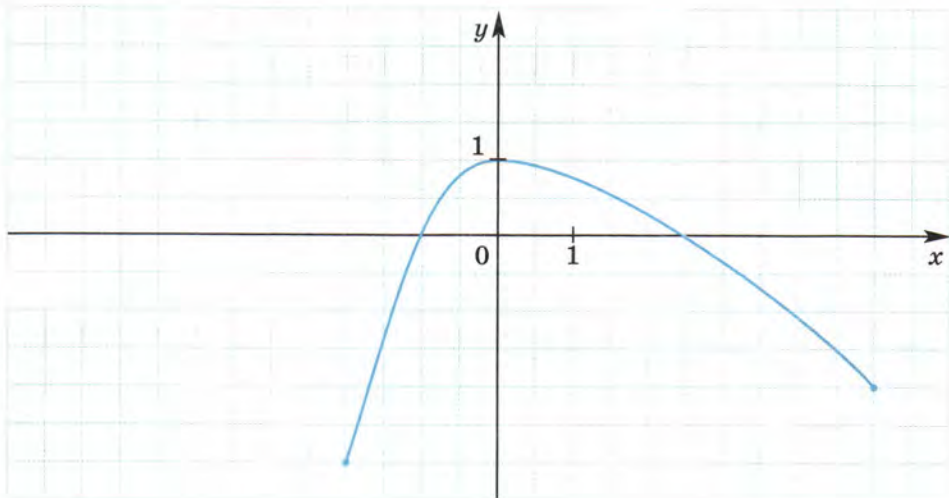
- 3 Функция задана формулой $y = x^2 - 2x - 3$.

1) Найти значения x , при которых функция принимает положительные значения.

2) Найти наименьшее значение функции.

Ответ. 1) $\dots$; 2) $\dots$.

4 Функция $y(x)$ задана графиком.

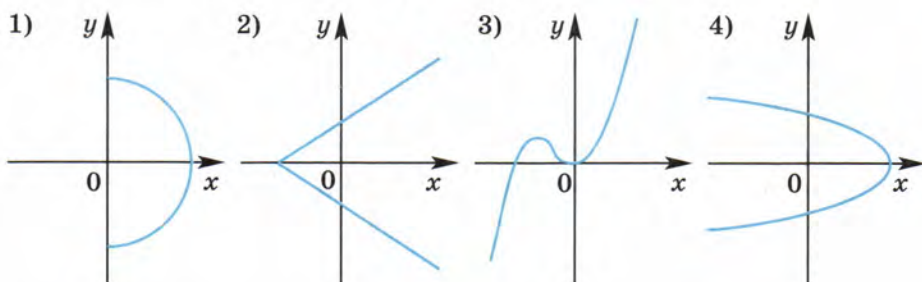


Найти:

- 1) $y(1)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y\left(2\frac{1}{2}\right)$;
- 2) наибольшее значение функции;
- 3) два значения x , при которых функция не определена;
- 4) значения x , при которых $y(x) < 0$.

Ответ. 1); 2); 3); 4)

5 На каком из рисунков изображён график функции?



Ответ. На рисунке

6 Закончить фразу.

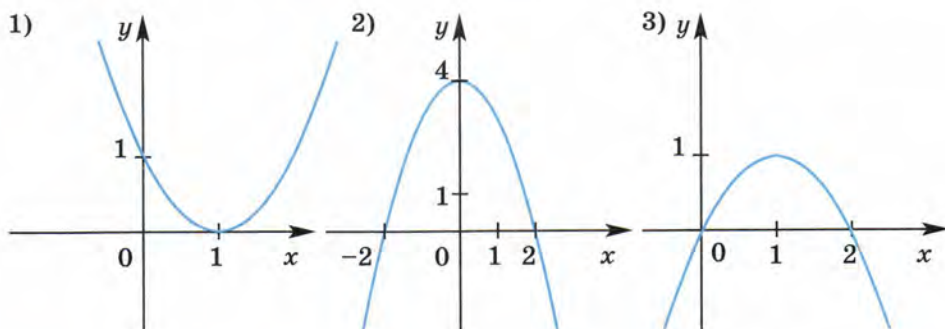
- 1) Выражение $0,3x + 0,7$ имеет смысл при

- 2) Выражение $3x^2 - x + 1$ имеет смысл при
- 3) Выражение $\frac{1}{x+1}$ имеет см при
- 4) Выражение $\sqrt{x-1}$ имеет с при
- 5) Выражение $\sqrt[3]{1-x}$ имеет смысл при
- 6) Выражение $x^{-2} + 1$ имеет смысл при

7 Закончить фразу.

- 1) График функции $y = x^2 + 2$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вдоль на
- 2) График функции $y = 2x^2 - 1$ получается из графика функции $y = 2x^2$ сдвигом вдоль на
- 3) График функции $y = (x-2)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вдоль на
- 4) График функции $y = (x+1)^2 - 2$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вдоль на , а затем вдоль на

8 На рисунке изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Найти a , b и c .



Ответ. 1) ; 2) ; 3)

II

9 Заполняя пропуски, найти область определения функции:

1) $y = 3x^2 + 2x - 1$. Выражение $3x^2 + 2x - 1$ имеет смысл при

поэтому функция $y = 3x^2 + 2x - 1$ определена при

2) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$. Выражение $\frac{1}{x^2 - 1}$ при $\neq 0$,

т. е. при, поэтому областью определения функции

$y = \frac{1}{x^2 - 1}$ являются,

кроме

3) $y = \sqrt{x + 3}$. Выражение $\sqrt{x + 3}$ при

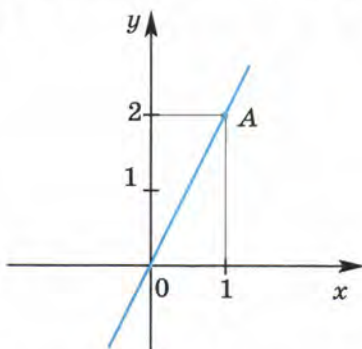
поэтому функция $y = \sqrt{x + 3}$ определена при

4) $y = \sqrt[3]{x - 5}$. Выражение $\sqrt[3]{x - 5}$

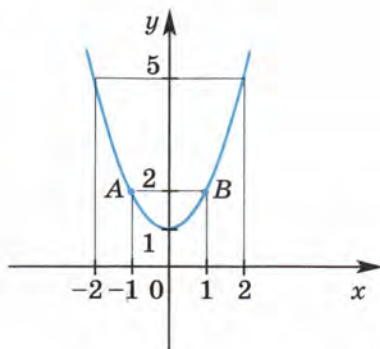
....., поэтому

10 Задать формулой функцию, график которой изображён на рисунке, и найти её область определения.

1)



2)



1) Так как графиком функции является прямая, проходящая через точки (.....) и (.....), то формула имеет вид $y = \dots\dots\dots$. Подставим координаты точки A в формулу $y = \dots\dots\dots$, получим $\dots\dots\dots$, откуда $k = \dots\dots\dots$.

Функция задана формулой $y = \dots\dots\dots$ и определена при $\dots\dots\dots$.

2) Так как вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ лежит на оси Oy , то $\dots\dots\dots$. Точки $A(\dots\dots\dots)$ и $B(\dots\dots\dots)$ принадлежат графику функции, поэтому $2 = a \cdot \square^2 + b \cdot \square + 1$ и $2 = a \cdot \square^2 + b \cdot \square + 1$.

Получим систему $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

Решим систему $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

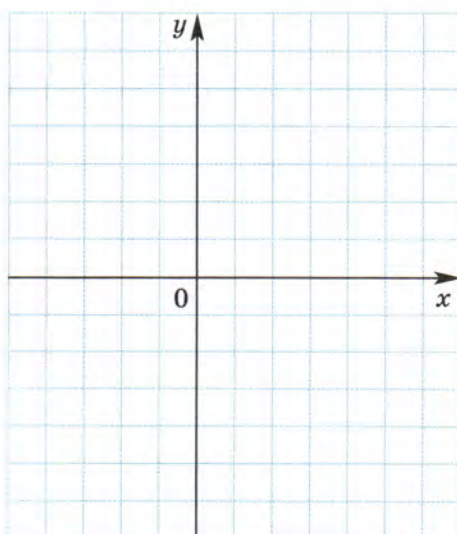
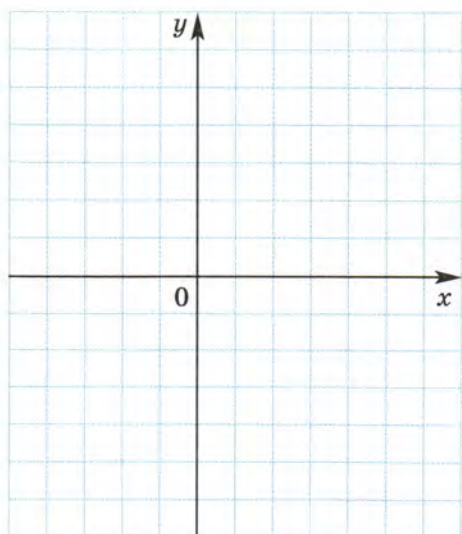
Таким образом, $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$.

Функция задана формулой $\dots\dots\dots$ и определена при $\dots\dots\dots$.

11 Построить график функции $y = f(x)$, если эта функция определена на отрезке $[-1; 2]$:

1) $y = 2x^2$;

2) $y = 3 - 2x$.



12 Найти область определения функции:

1) $y = \frac{x-1}{x^2+3x-4}$.

2) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

Ответ. 1); 2)

13 Изобразить (на с. 47) эскиз графика функции $y=f(x)$, у которой область определения:

1) $[-3; 3]$; 2) $x \geq 2$.

14* Построить (на с. 47) график функции:

1) $y = |x| + 2$. Построим график функции $y = |x|$, затем осуществим его сдвиг вдоль

2) $y = 2 - |x|$. Построим график функции $y = -|x|$ и осуществим его сдвиг вдоль

3) $y = |x - 2|$. Построим график функции $y = |x|$ и осуществим

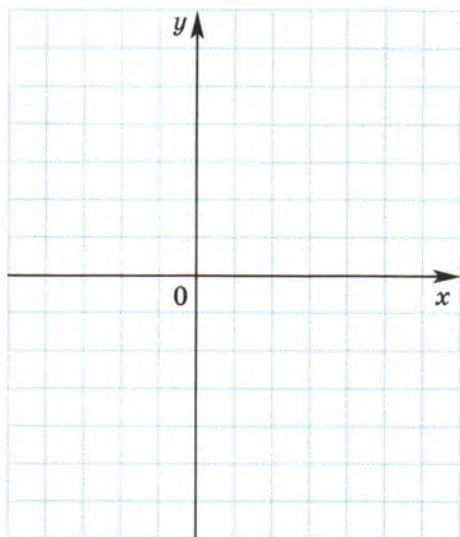
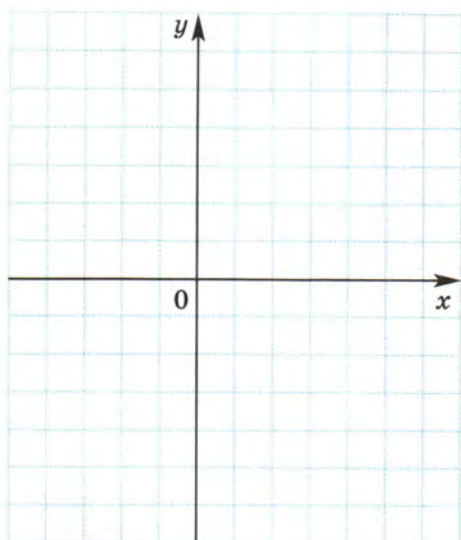
III

15 Найти область определения функции:

1) $y = \frac{x^2-2}{x^2+4}$.

2) $y = \sqrt{x^2-2x}$.

Ответ. 1); 2)



16* Построить график функции $y = |x + 3|$.

17* Построить график функции

$$y = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{при } x < -1, \\ |x| & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

§ 13. Возрастание и убывание функции

1

1 В пустые клетки вписать необходимый по смыслу знак $>$ или $<$:

1) $2^{71} \square 2,1^{71}$, так как $0 \square 2 \square 2,1$ и $71 \square 0$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \square \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, так как $\frac{1}{2} \square \frac{1}{3} \square 0$ и $\frac{1}{2} \square 0$;

3) $72^{-4} \square 71,9^{-4}$, так как $72 \square 71,9 \square 0$ и $-4 \square 0$;

4) $(0,3)^{-\frac{3}{2}} \square (0,33)^{-\frac{3}{2}}$, так как $0 \square 0,3 \square 0,33$ и $-\frac{3}{2} \square 0$.

2 Закончить фразу.

1) Областью определения функции $y = x^2$ является множество

2) Областью определения функции $y = \frac{1}{x^2}$ является множество

3) Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество

4) Областью определения функции $y = \sqrt[3]{x}$ является множество

3 Сравнить с нулём разность выражений $3a + 7$ и $3b + 7$, если $a < b$.

$(3a + 7) - (3b + 7) =$

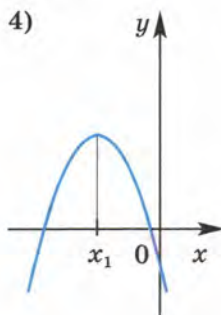
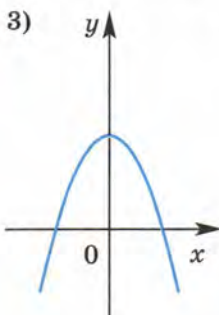
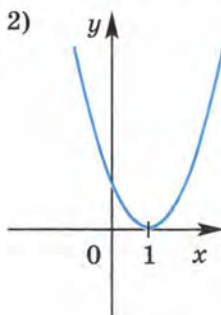
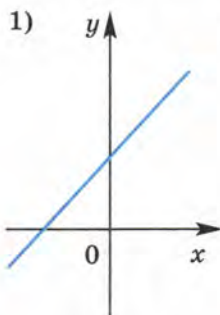
4 Доказать, что $2x^2 + 3 > 2y^2 + 3$, если $x > y > 0$.

$(2x^2 + 3) - (2y^2 + 3) =$

....., так как

следовательно, $2x^2 + 3$ ☐ $2y^2 + 3$.

5 С помощью графика, изображённого на рисунке, записать промежутки, на которых функция возрастает (убывает).



Ответ. 1)

2)

3)

4)

II

6 Заполнить таблицу.

Функция	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = \frac{1}{x}$	$y = \frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$
Показатель степени аргумента				-1		
Область определения функции				$x \neq 0$		

7 Заполнить пропуски в записи определения возрастающей на промежутке функции.

Функция $y(x)$ называется возрастающей на промежутке, если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих , таких, что , выполняется неравенство

8 Даны функции $y = x$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^{-5}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$.

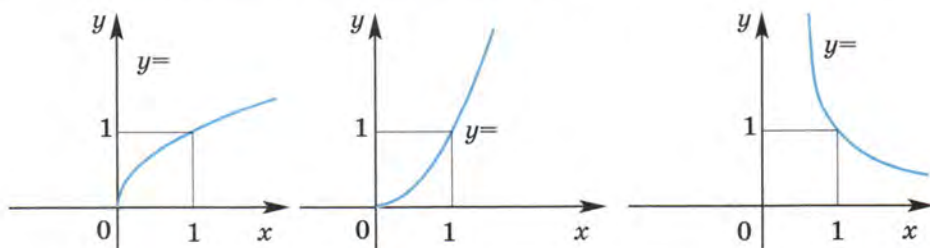
Подчеркнуть одной чертой те из них, которые возрастают на промежутке $x \geq 0$, и двумя чертами те, которые убывают на промежутке $x \geq 0$.

9 Доказать, что функция $y = x^4$ убывает на промежутке $x \leq 0$. Пусть $x_2 \square x_1 \square 0$. Покажем, что $y(x_2) \square y(x_1)$.

Рассмотрим разность $y(x_2) - y(x_1) = x_2^4 - x_1^4 = \dots\dots\dots$

Так как , то , значит, $y(x_2) - y(x_1) \square 0$ и функция является убывающей.

10 На эскизе графика написать соответствующую ему формулу, задающую функцию на промежутке $x > 0$: $y = x^5$, $y = x^{-4}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$.



- 11** Доказать, что функция $y = x^2 - 4x$ убывает на промежутке $x \leq 2$. Пусть $x_2 \square x_1 \square 2$. Покажем, что $y(x_2) \square y(x_1)$.

Рассмотрим разность

.....

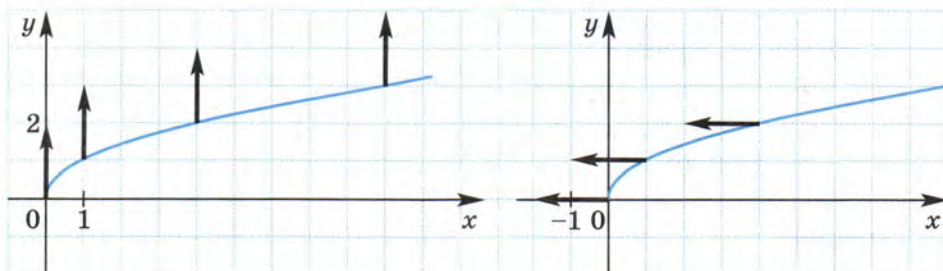
.....

- 12** Построить график функции:

1) $y = \sqrt{x} + 2$. Построим график функции $y = \sqrt{x}$, предварительно заполнив таблицу:

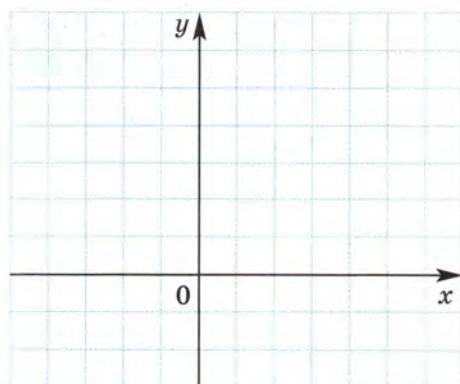
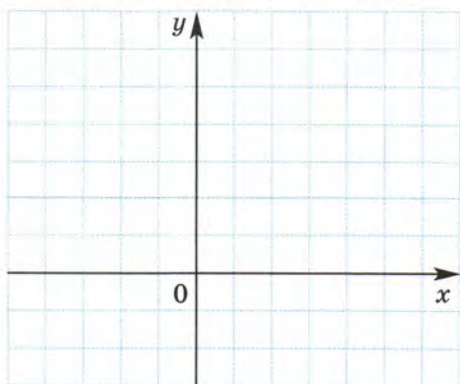
x	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	0
$y = \sqrt{x}$				$\frac{1}{2}$		

Осуществим сдвиг графика вдоль



2) $y = \sqrt{x+2}$. Построим график функции $y = \sqrt{x}$, затем осуществим сдвиг его вдоль

3) $y = \sqrt{x-1} - 2$. Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и осуществим сначала его сдвиг вдоль, а затем вдоль



4) $y = 2\sqrt{x}$. Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и осуществим растяжение графика функции $y = \sqrt{x}$ от оси вдоль оси в 2 раза.

- 13** С помощью графиков, построенных в предыдущем задании, заполнить таблицу:

Функция	Область определения	Область значений	Промежутки возрастания (убывания)
$y = \sqrt{x} + 2$			
$y = \sqrt{x+2}$	$x \geq -2$	$y \geq 0$	$x \geq -2$
$y = \sqrt{x-1} - 2$			

- 14*** Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции

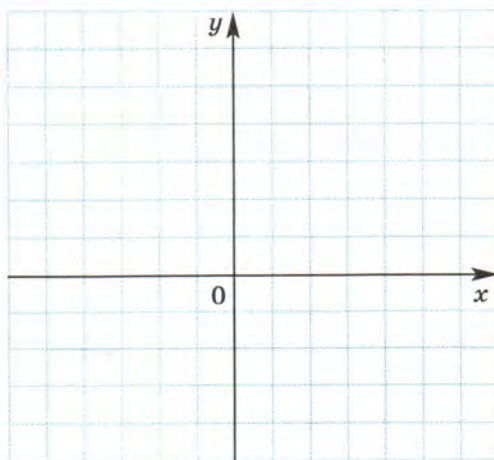
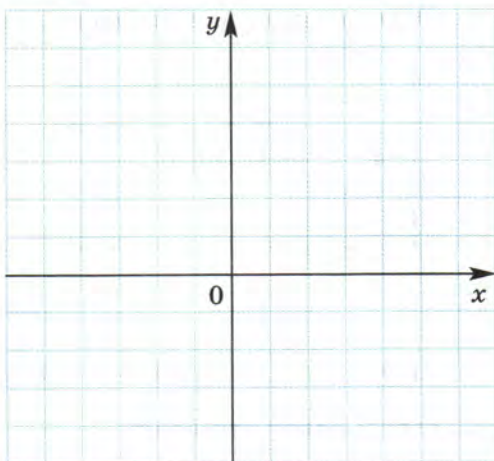
$$y = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 2 - x^2, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Ответ.

.....

- 15** Изобразить эскиз графика некоторой функции $y = f(x)$, которая является возрастающей при $x \leq -1$, $x \geq 3$ и убывающей при $-1 < x < 3$.

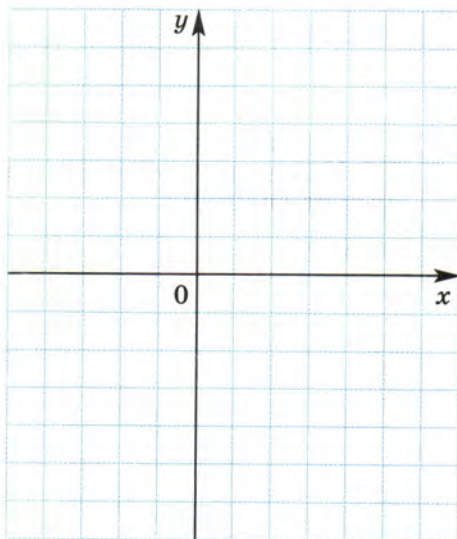
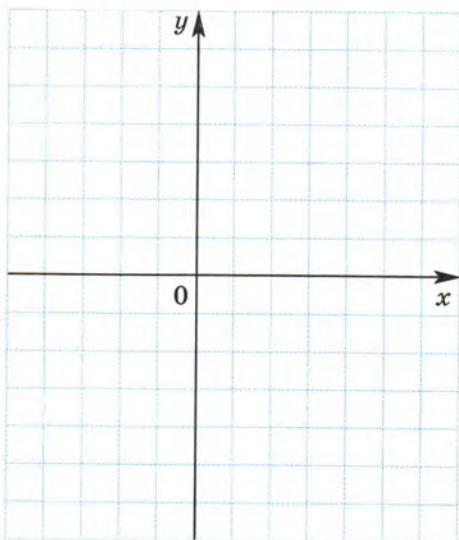
.....



III

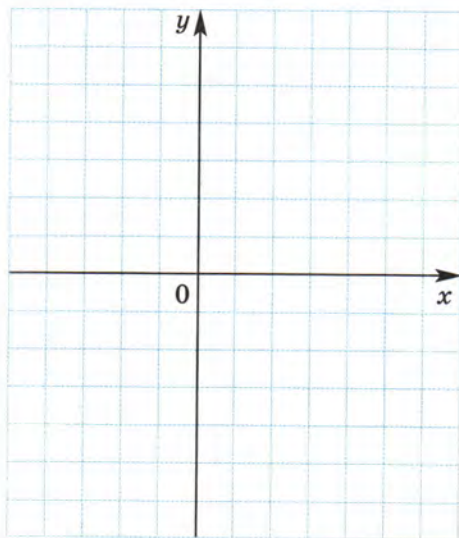
- 16 Нарисовать эскиз графика функции $y = f(x)$ на промежутке $x \geq 0$ и записать, возрастает или убывает функция, если

1) $y = x^6$; 2) $y = x^{-3}$; 3) $y = x^{\frac{1}{2}}$.



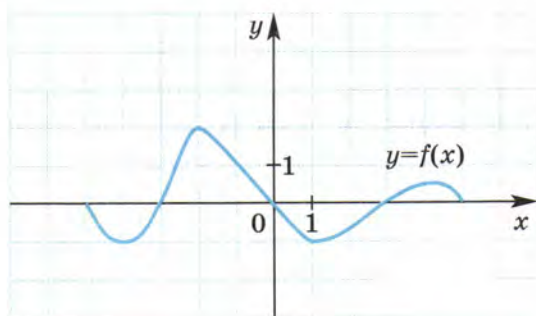
Ответ.

.....



- 17 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найти промежутки, на которых функция:

- 1) принимает положительные значения;
- 2) принимает отрицательные значения;
- 3) возрастает;



4) убывает.

5)* Найти область определения функции. Какие значения принимает функция?

Ответ.

1)

2)

3)

4)

5)

18* Доказать, что функция $y = x^6 - 1$ возрастает на промежутке $x \geq 0$.

.....

.....

.....

.....



§ 14. Чётность и нечётность функции

1

1 Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} - 8^{\frac{1}{3}} + (0,75)^0 =$

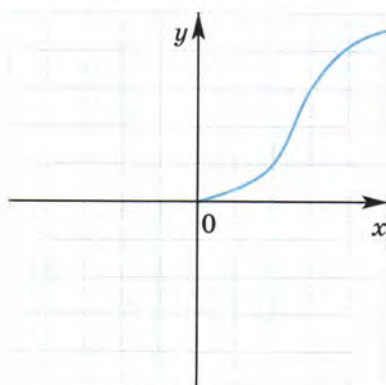
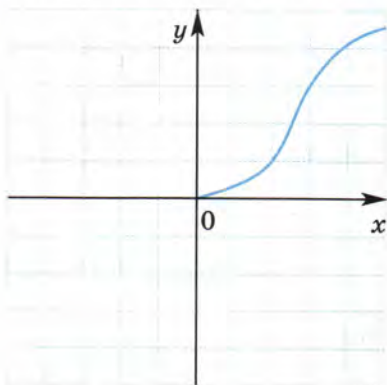
.....;

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \dots\dots\dots$$

2 Заполнить таблицу:

x	$y = x $	$y = x^2$	$y = x^{-2}$	$y = x^3$	$y = x^{-3}$	$y = x^4$
-3				-27		
-2,5				-15,625		
-2				-8		
-1				-1		
-0,5				-0,125		
0				0		
0,5				0,125		
1				1		
2				8		
2,5				15,625		
3				27		

3 На рисунке изображена часть графика функции $y = f(x)$.



Изобразить другую часть графика, если известно, что она:

- 1) симметрична данной относительно оси ординат;
- 2) симметрична данной относительно начала координат.

- 4 Дана точка $A(-3; 7)$. Записать координаты точек B , C и D , если:
 1) точка B симметрична точке A относительно оси Ox ;
 2) точка C симметрична точке A относительно оси Oy ;
 3) точка D симметрична точке A относительно начала координат.

Ответ. 1) $B(.....)$; 2) $C(.....)$; 3) $D(.....)$.

- 5 Сравнить значения функции при $x=2$ и $x=-2$, если:

1) $y = x^2 - x^4$. $y(2) =$, $y(-2) =$

2) $y = x + x^3$. $y(2) =$, $y(-2) =$

3) $y = x + x^2$. $y(2) =$, $y(-2) =$

Ответ. 1) $y(2) \square y(-2)$; 2) $y(2) \square y(-2)$; 3) $y(2) \square y(-2)$.

II

- 6 Заполнить пропуски в доказательстве того, что функция $y(x) = 2x^2 + \frac{1}{x^4}$ является чётной.

Область определения функции: Для всех $x \square 0$
 $y(-x) = 2(.....)^2 + =$, т.е. верно
 равенство $y(-x) =$ для любого x из
 Следовательно, функция является

- 7 Заполнить пропуски в доказательстве того, что функция $y(x) = \frac{1}{x} + 3x^3$ является нечётной.

Область определения функции: Для всех $x \neq 0$
 $y(-x) = + 3 =$, т.е. верно
 равенство $y(-x) =$ для любого x
 Следовательно, функция является

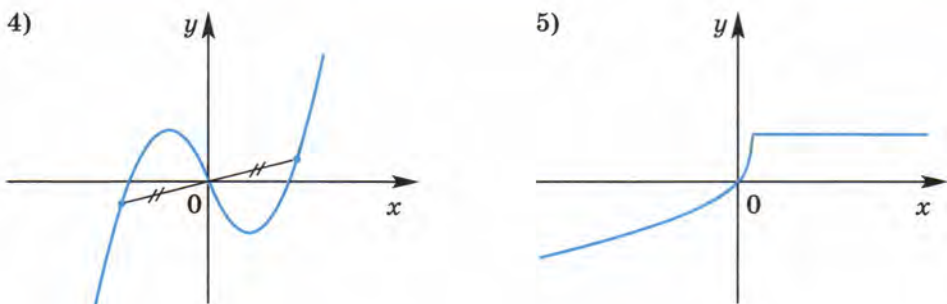
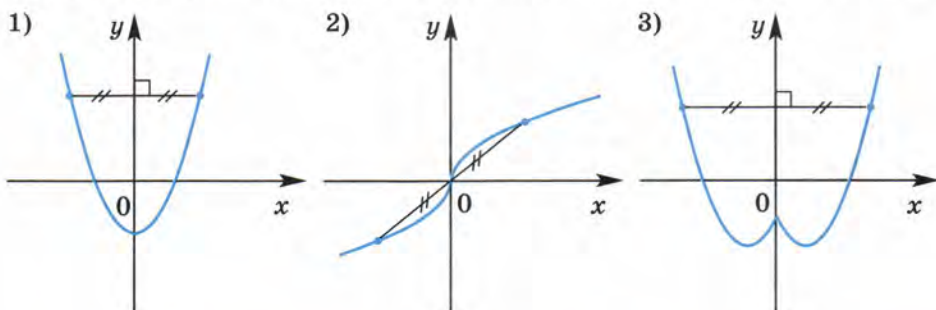
- 8 Найти область определения и выяснить, является чётной или нечётной функция:

1) $y(x) = 3x^2$. Область определения функции:
 $y(-x) = 3$, таким образом,
 $y(x) =$ для любого x из
 Следовательно, функция

2) $y(x) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x}$. Область определения функции:

.....

- 9** На рисунке изображены графики функций. Под каждым из них подписать, является ли функция, заданная данным графиком, чётной, нечётной или не является ни чётной, ни нечётной.



- 10** Функция $y(x)$ является чётной. Найти:

- 1) $y(-2)$, $3y(-2)$, если $y(2) = 7$;
2) $y(7)$, $y(7) - 1$, если $y(-7) = 1$.

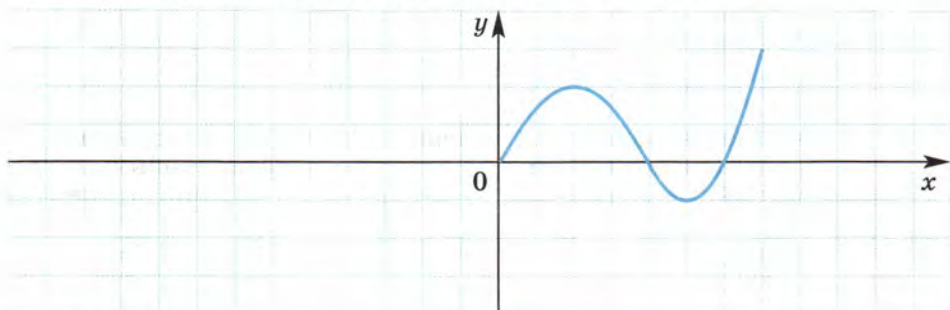
Ответ. 1) $y(-2) = \dots$; $3y(-2) = \dots$;
2) $y(7) = \dots$; $y(7) - 1 = \dots$.

- 11** Функция $y(x)$ является нечётной. Найти:

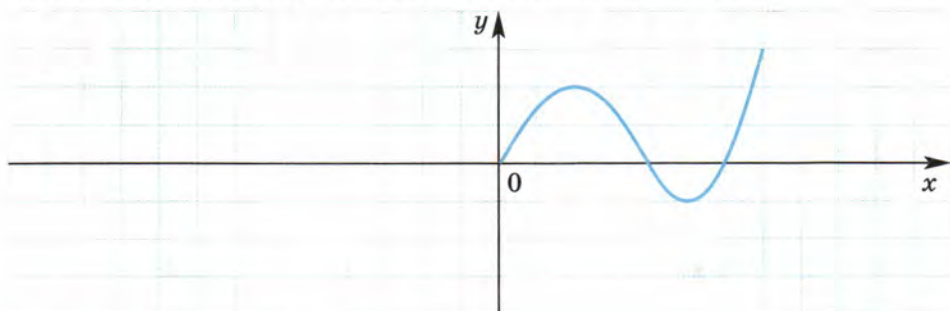
- 1) $y(-3)$, если $y(3) = \frac{1}{2}$; 2) $y(10)$, если $y(-10) = -1$.

Ответ. 1) $y(-3) = \dots$; 2) $\dots$.

- 12** На рисунке изображена часть графика чётной функции $y(x)$ для $x \geq 0$. Достроить график функции для $x < 0$.



- 13** На рисунке изображена часть графика нечётной функции $y(x)$ для $x \geq 0$. Достроить график функции для $x < 0$.

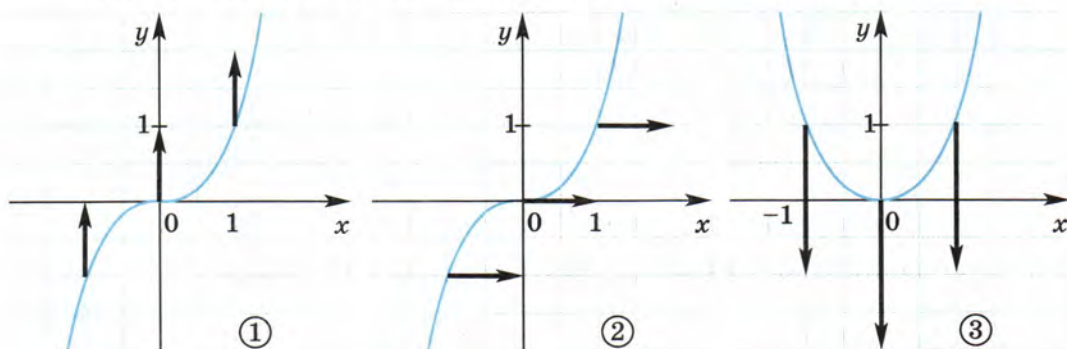


- 14** Построить график функции:

1) $y = x^3 + 1$. Построим график функции $y = x^3$. Функция $y = x^3$ нечётная, поэтому для $x > 0$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$y = x^3$				

Далее осуществим его сдвиг вдоль



2) $y = (x - 1)^3$. Построим график функции $y = x^3$. Осуществим его сдвиг вдоль

3) $y = x^4 - 2$. Построим график функции $y = x^4$. Функция $y = x^4$

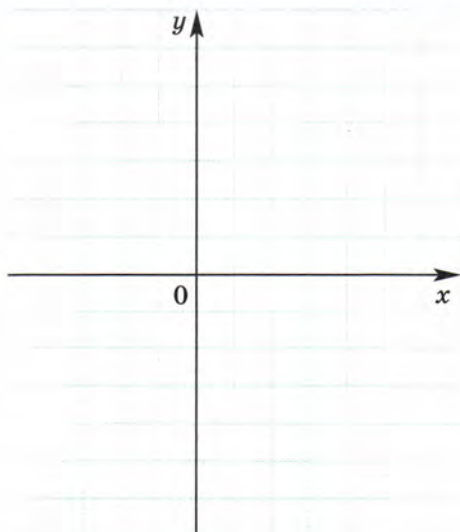
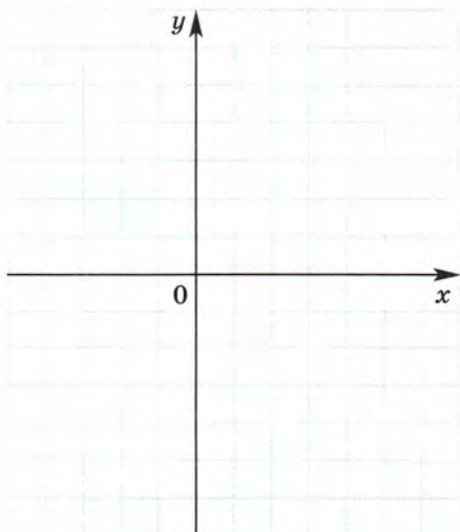
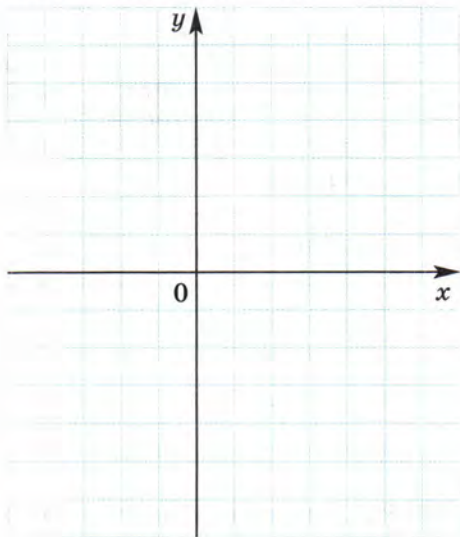
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$y = x^4$				

Осуществим сдвиг

4) $y = (x + 1)^4$. Построим график функции $y = x^4$. Осуществим сдвиг

5) $y = 2x^3$. Построим график функции $y = x^3$. Осуществим растяжение

6) $y = \frac{x^3}{3}$. Построим график функции $y = x^3$. Осуществим сжатие



- 15** С помощью построенных в предыдущей задаче графиков функций заполнить таблицу:

Функция	Область определения	Область значений	Промежутки		Чётность
			возрастания	убывания	
$y = x^3 + 1$	Все действ. числа	Все действ. числа	Вся числовая ось	—	Ни чётная, ни нечётная
$y = (x - 1)^3$					
$y = x^4 - 2$					
$y = (x + 1)^4$					
$y = \frac{x^3}{3}$					

- 16*** Исследовать функцию $y = x^2 + 3|x| - 4$ и построить её график.

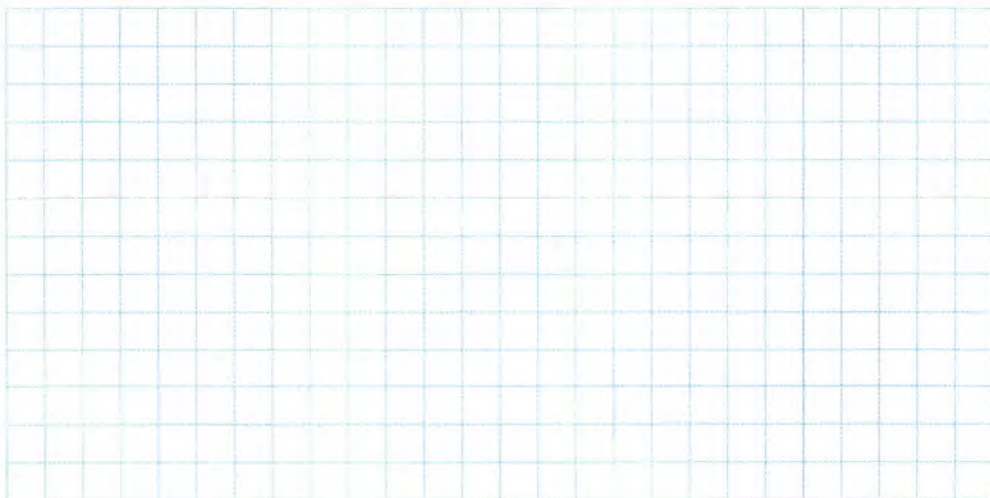
- 1) Область определения
 2) $y = (-x) = \dots$, т. е. $y = (-x) = \dots$

Следовательно, функция является

- 3) При $x \leq 0$ $|x| = \dots$, тогда при $x \leq 0$ $y = \dots$

Построим часть графика этой функции, лежащую в левой полуплоскости.

Построим с помощью симметрии часть графика для $x > 0$.



III

17 Изобразить эскиз графика функции

.....

.....

.....

18 Доказать, что функция:

1) $y(x) = 2x^2 - |x|$ является чётной

2) $y(x) = x^3 - \sqrt[3]{x}$ является нечётной

3) $y = x^2 + x^3 + 1$ не является ни нечётной, ни чётной



§ 15. Функция $y = \frac{k}{x}$

I

1 Заполнить таблицу:

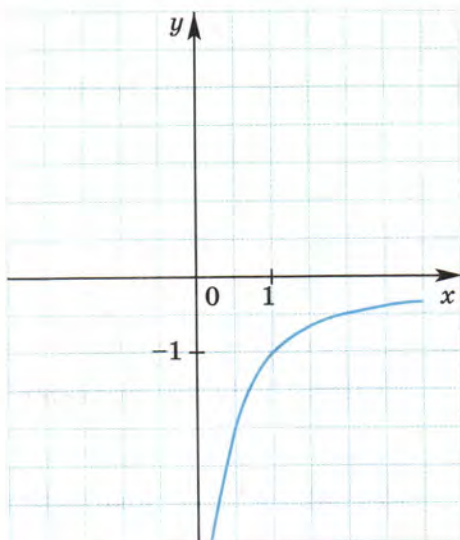
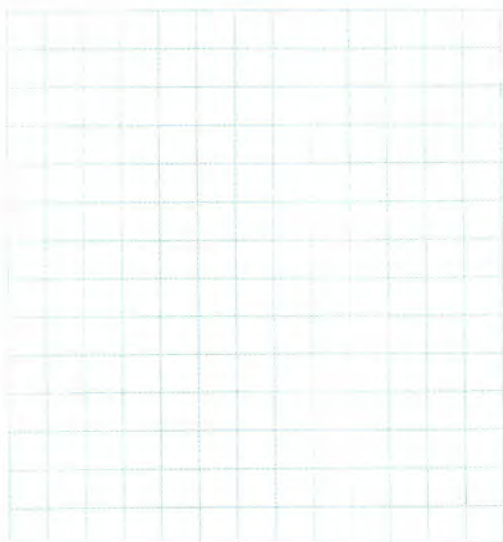
Функция	$y = x^4 + 1$	$y = \frac{1}{x+1}$	$y = \frac{5}{x}$	$y = \sqrt{x^2 - 1}$
Область определения			$x \neq 0$	

2 Заполнить пропуски в доказательстве того, что функция $y = -\frac{1}{x}$ является возрастающей при $x > 0$.

Пусть $x_1 > x_2 > 0$. Покажем, что $y(x_1)$ $y(x_2)$.

Рассмотрим разность

.....



- 3 Изобразить эскиз графика функции, у которой областью определения являются все действительные числа, кроме 0, и при $x > 0$ функция возрастает.

- 4 Доказать, что функция $y = \frac{7}{x}$ является нечётной.

Область определения функции $y(x) = \frac{7}{x}$, $y(-x) = \dots\dots\dots$
 для из области определения.

- 5 Заполнить таблицу, предварительно вычислив значение k для функции $y = \frac{k}{x}$:

x	0,3	0,5	$\frac{3}{4}$	1,5	2	$2\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{4}$	4,5
$y = \frac{\boxed{}}{x}$						$\frac{9}{7}$		

$\frac{9}{7} = \frac{k}{}$, откуда

II

- 6 На рисунке изображён график функции $y = -\frac{7}{x}$ при $x > 0$. Построить график этой функции при $x < 0$ и записать:

- 1) область определения функции:
- 2) значения, которые может принимать функция:
- 3) промежутки возрастания (убывания) функции:

- 7 В одной системе координат построить графики функций $y = x^2$ и $y = \frac{2}{x}$ и выяснить, сколько корней имеет уравнение $x^2 - \frac{2}{x} = 0$.

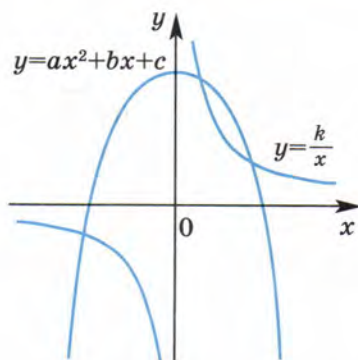
Ответ.

- 8 На рисунке изображены графики функций

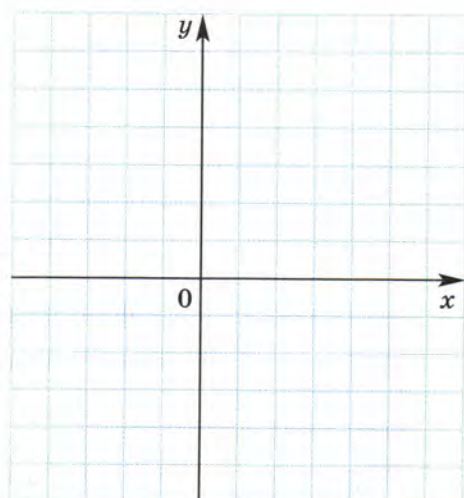
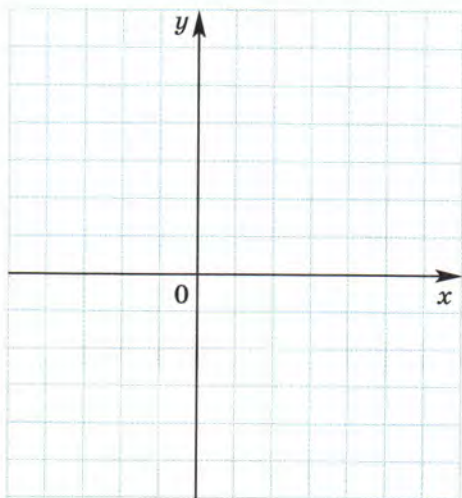
$$y = \frac{k}{x} \text{ и } y = ax^2 + bx + c.$$

Обвести красным карандашом ту часть графика функции $y = \frac{k}{x}$, для точек которой выполняется неравенство

$$\frac{k}{x} < ax^2 + bx + c.$$



- 9 В одной системе координат построить графики функций $y = \frac{3}{x}$ и $y = \frac{x}{3}$ и найти значения x , при которых выполняется неравенство $\frac{3}{x} > \frac{x}{3}$.

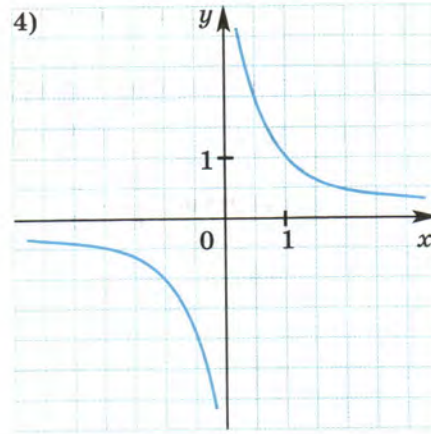
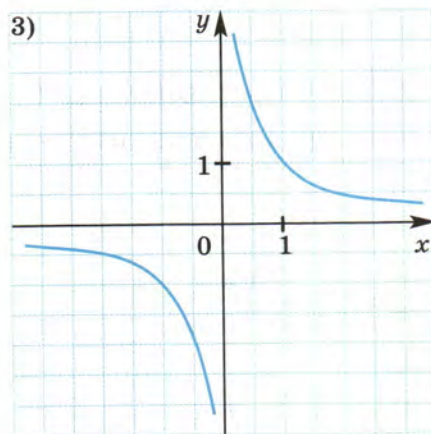
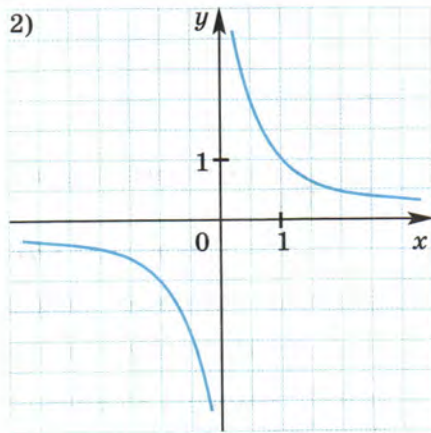
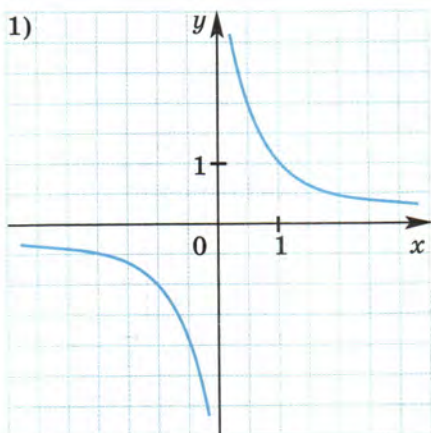


Ответ.

10 На рисунке изображён график функции $y = \frac{1}{x}$. Нарисовать

эскизы графиков функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^3$, $y = x^4$ и объяснить, сколько корней имеет уравнение:

- 1) $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$; 2) $\frac{1}{x} = \sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{1}{x} = x^3$; 4) $\frac{1}{x} = x^4$.

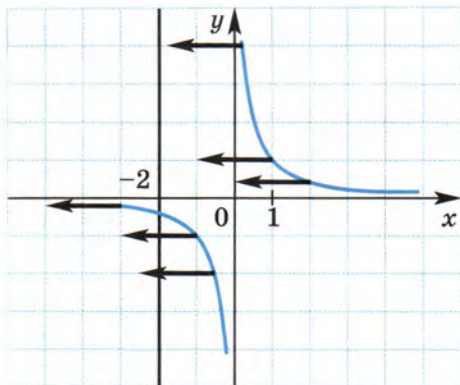
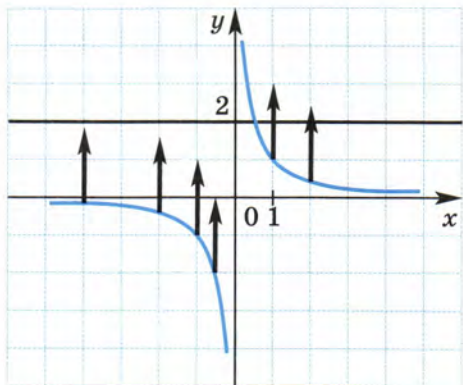


Ответ. 1); 2); 3); 4)

11 Построить график функции:

1) $y = \frac{1}{x} + 2$. Построим график функции $y = \frac{1}{x}$, затем осуществим его сдвиг вдоль

2) $y = \frac{1}{x+2}$. Построим график функции $y = \frac{1}{x}$, затем осуществим его сдвиг вдоль

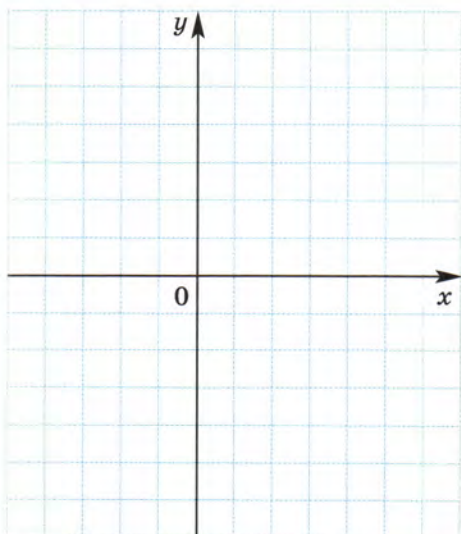
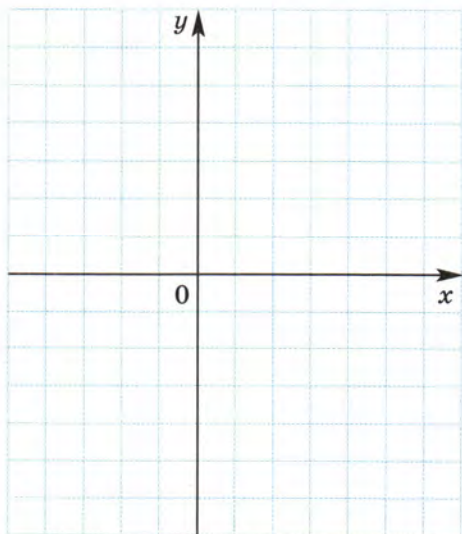


3) $y = \frac{2}{x} - 1$. Построим график функции $y = \frac{2}{x}$ для $x > 0$ и затем

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$y = \frac{2}{x}$					

Осуществим его сдвиг вдоль

.....



4) $y = \frac{2}{x-1}$. Построим график функции $y = \frac{2}{x}$. Осуществим его

сдвиг вдоль

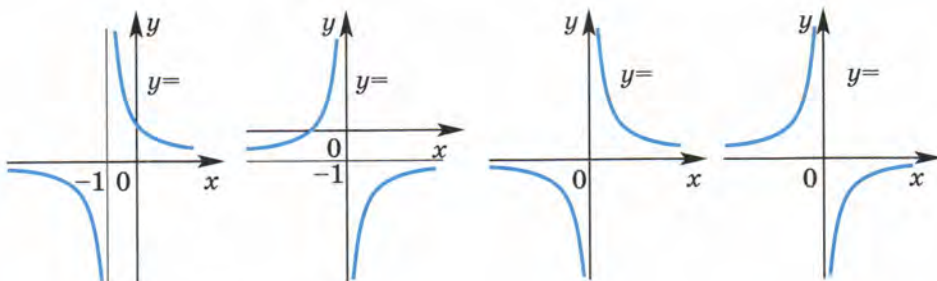
- 12** С помощью построенных в предыдущем задании графиков функций заполнить таблицу:

Функция	Область определения	Область значений	Промежутки	
			возрастания	убывания
$y = \frac{1}{x} + 2$				
$y = \frac{1}{x+2}$	$x \neq -2$	$y \neq 0$	—	$x < -2,$ $x > -2$
$y = \frac{2}{x} - 1$				
$y = \frac{2}{x-1}$				

III

- 13** На эскизе графика функции написать формулу функции, которой соответствует этот график:

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = -\frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{x+1}; \quad y = \frac{2}{x} - 1.$$



§ 16. Неравенства и уравнения, содержащие степень

1

1 Вычислить:

1) $\sqrt{625} = \dots\dots\dots$; 2) $\sqrt[4]{625} = \dots\dots\dots$;

3) $\sqrt[3]{216} = \dots\dots\dots$; 4) $\sqrt[7]{1} = \dots\dots\dots$;

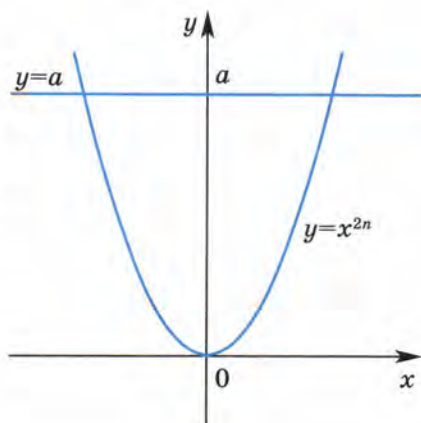
5) $\sqrt[5]{32} = \dots\dots\dots$; 6) $\sqrt[4]{256} = \dots\dots\dots$.

2 Даны графики функций

$$y = a \text{ и } y = x^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обвести другим цветом точки той части графика функции $y = x^{2n}$ и той части оси Ox , для которых выполняется неравенство

$$x^{2n} \leq a.$$

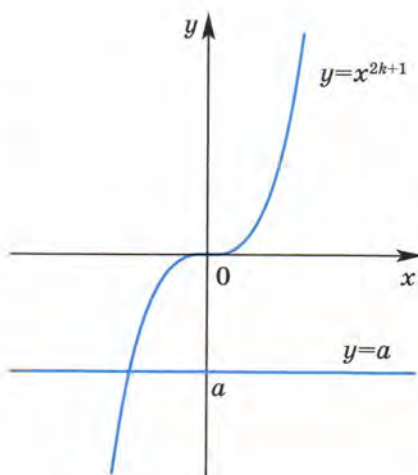


3 Даны графики функций

$$y = a \text{ и } y = x^{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обвести другим цветом точки той части графика функции $y = x^{2k+1}$ и той части оси Ox , для которых выполняется неравенство

$$x^{2k+1} \geq a.$$



4 Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-5)^3}$ при $x \geq 5$; $\sqrt[3]{(x-5)^3} = \dots\dots\dots$

2) $\sqrt{(2-x)^2}$ при $x > 2$; $\sqrt{(2-x)^2} = \dots\dots\dots$

5 Найти значения x , при которых выполняется равенство:

1) $\sqrt{x} = 3$, 2) $\sqrt{x} = 8$, 3) $\sqrt{x} = 0,5$.

.....
.....

II

6 Решить неравенство:

1) $x^7 < 128$, $128 = 2^7$, $x^7 < 2^7$. Функция $y = x^7$ определена и при всех ,
следовательно, если $x^7 < \dots\dots\dots$, то $x < \dots\dots\dots$.

2) $x^3 \geq 216$, $216 = \square^3$,
.....
.....

Ответ. 1) ; 2)

7 Решить неравенство:

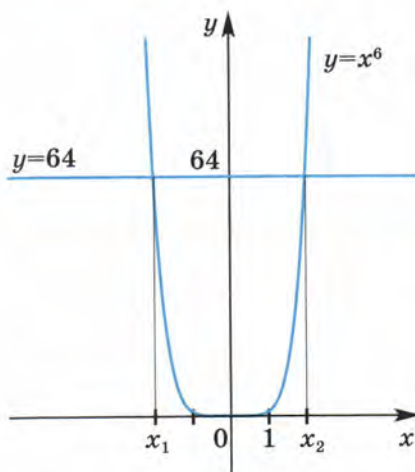
1) $x^6 \leq 64$, $64 = \square^6$, $x^6 \leq \dots\dots\dots$

Функция $y = x^6$ убывает при и возрастает
при , $x^6 = 2^6$, $x_1 \dots\dots\dots$,
 $x_2 \dots\dots\dots$, $x^6 \leq 64$ при
.....

2) $x^4 > 10\,000$, $10\,000 = \square^4$,

$x^4 \dots\dots\dots$

Функция $y = x^4$ убывает при
..... и возрастает

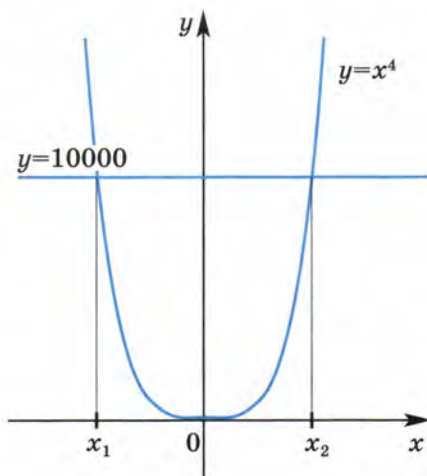


при , $x^4 = \dots\dots\dots$,
 $x_1 = \dots\dots\dots$, $x_2 = \dots\dots\dots$,
 $x^4 > 10\,000$ при

Ответ.

1) ;

2)



8 Проверить, является ли число x корнем уравнения:

1) $\sqrt{x-1} = 3$, если $x = 10$

2) $\sqrt{x^2-3} = 1$, если $x = -2$

3) $\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+5}$, если $x = -3$

4) $\sqrt{x^2-13} = 1-x$, если $x = 7$

9 Решить уравнение:

$$\sqrt{3x+1} = 4, (\sqrt{3x+1})^2 = 4^2, 3x+1=16, 3x=15, x=5.$$

1) $\sqrt{x+1} = 7$,

2*) $\sqrt{x+5} = \sqrt{3x+15}$, $(\dots\dots\dots)^2 = (\dots\dots\dots)^2$,

Проверка. При $x = \dots\dots\dots$

$\sqrt{x+5} = \dots\dots\dots$

$\sqrt{3x+15} = \dots\dots\dots$

3*) $\sqrt{x^2-2x+1} = 2x-4$, $(\dots\dots\dots)^2 = (\dots\dots\dots)^2$,

Проверка. Пусть $x = \dots\dots\dots$, тогда $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{9-6+1} = \sqrt{4} = 2$, $2x-4 = \dots\dots\dots$.

Пусть $x = \dots\dots\dots$, тогда $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \dots\dots\dots$
 $2x - 4 = \dots\dots\dots$

Ответ. 1) $\dots\dots\dots$; 2) $\dots\dots\dots$; 3) $\dots\dots\dots$; 4) $\dots\dots\dots$

- 10** С помощью эскиза графика функции $y = (x + 1)^3$ решить неравенство $(x + 1)^3 > 1$.

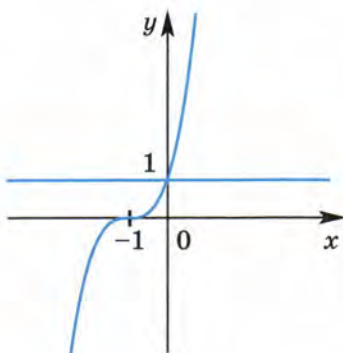
Построим график функции $y = x^3$ и осуществим его сдвиг

$\dots\dots\dots$. Построим

график функции $y = \dots\dots\dots$ и найдём абсциссу точки пересечения двух графиков. Это

$x = \dots\dots\dots$.

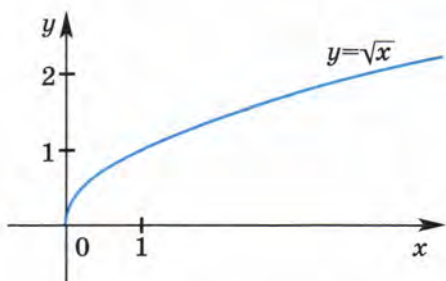
Ответ. $\dots\dots\dots$



- 11*** Решить неравенство $\sqrt{x - 2} < 2$ и сделать графическую иллюстрацию решения.

Функция $y = \sqrt{x - 2}$ определена при $\dots\dots\dots$ и принимает неотрицательные значения.

Правая часть неравенства неотрицательна. Возведём обе части неравенства в $\dots\dots\dots$, получим $\dots\dots\dots$, откуда $\dots\dots\dots$. Следовательно, решение неравенства $\dots\dots\dots$.



III

- 12** Решить уравнение:

1) $\sqrt{x + 5} = 3$,

2) $\sqrt{x - 1} = \sqrt{2x}$.

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

.....
.....
Ответ.

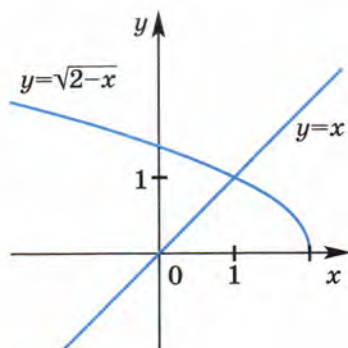
.....
.....
Ответ.

13* Решить неравенство

$$\sqrt{2-x} < x$$

с помощью изображённых на
рисунке графиков.

Ответ.



Прогрессии

§ 17. Числовая последовательность

I

1 Заполнить таблицу:

№ п/п	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$2n$					10					
2	$2n - 1$					9					
3	n^2					25					

II

2 Дана последовательность чётных чисел

$$2, 4, 6 \dots, 2n, 2(n+1), \dots$$

1) Записать четвёртый, седьмой и n -й член этой последовательности:,,

2) Записать номера членов последовательности, равных 6, 18, $2(n+1)$:,,

3 Вычислить первые 3 члена последовательности, которая задана формулой n -го члена:

1) $a_n = 2n + 1$, $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = \dots$, $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = \dots$, $a_3 = \dots$;

2) $a_n = \frac{1}{n^2 + 3}$, $a_1 = \frac{1}{1^2 + 3} = \dots$, $a_2 = \dots$, $a_3 = \dots$.

4 Последовательность задана формулой $a_n = n^2 + 1$. Выяснить:

1) номер члена этой последовательности, равного 82, 170.

$82 = n^2 + 1$, откуда $n^2 = \dots$, $n = \pm \dots$, но так как искомый номер $n \in \mathbb{N}$, то $n = \dots$;

$170 = \dots$, откуда $n^2 = \dots$, $n = \dots$;

2) является ли членом последовательности число 24, 37.

$24 = n^2 + 1$, откуда $n^2 = 23$, $n = \pm \dots$, но так как искомое n — натуральное число, то число 24 не является членом последовательности;

.....
.....
.....
Ответ. 1) $n = \dots$; $n = \dots$; 2) не является;

5 Найти первые 3 члена последовательности, заданной рекуррентной формулой:

1) $a_{n+1} = a_n + 5$, если $a_1 = -3$;

$a_1 = -3$, $a_2 = -3 + 5 = \dots$, $a_3 = \dots + 5 = \dots$;

2) $a_{n+1} = 10 - 3a_n$, если $a_1 = 4$;

$a_1 = 4$, $a_2 = 10 - 3 \cdot 4 = \dots$, $a_3 = \dots$;

3) $a_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot a_n\right)$, если $a_1 = 0$.

$a_1 = 0$, $a_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = \dots$, $a_3 = \dots$.

III

6 Последовательность задана формулой $x_n = n^2 - n$.

1) Найти одиннадцатый член последовательности.

.....
2) Выяснить, является ли число 16 членом этой последовательности.
.....

3) Найти номер члена последовательности, равного 56.

.....
.....

7 Найти первые 3 члена последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{2}$ и условием $a_1 = 81$.

.....
.....

§ 18. Арифметическая прогрессия

Ⓘ

1 Заполнить таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n = 2 + 3n$					17			

С помощью таблицы найти

$$a_2 - a_1 = \dots, a_3 - a_2 = \dots, a_6 - a_5 = \dots, a_8 - a_7 = \dots.$$

Высказать предположение: $a_{n+1} - a_n = \dots$.

2 Заполнить таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n = n^2$					25			

С помощью таблицы найти

$$a_2 - a_1 = \dots, a_8 - a_2 = \dots, a_6 - a_5 = \dots, a_8 - a_7 = \dots.$$

Высказать предположение о разности последующего и предыдущего членов последовательности $a_n = n^2$:

.....

Ⓜ

3 Назвать первый член и найти разность арифметической прогрессии:

1) 4, 7, 10, ...; $a_1 = \dots$; $d = \dots$;

2) -7, -4, -1, ...; $a_1 = \dots$; $d = \dots$.

4 Записать первые четыре члена арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 12$; $d = -2$

2) $a_1 = -0,5$; $d = 1,5$

- 5 Доказать, что последовательность $a_n = -3(5 - n)$ является арифметической прогрессией.

$$a_{n+1} = -3(5 - (n + 1)) = -15 + 3(n + 1) = \dots$$

$$a_n = -3(5 - n) = \dots$$

$$a_{n+1} - a_n = \dots$$

Разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n , поэтому последовательность

$$a_n = -3(5 - n) \dots$$

- 6 В арифметической прогрессии найти:

1) a_{21} , если $a_1 = 13$, $d = 2$. $a_{21} = 13 + (21 - 1) \cdot 2 = \dots$

2) a_{15} , если $a_1 = \frac{1}{3}$, $d = -1$ $\dots$

- 7 Записать формулу n -го члена арифметической прогрессии:

1) 3; 10; 17; ... $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $d = a_2 - a_1 = \dots$,

$$a_n = 3 + (n - 1) \dots$$

2) -5; -8; -11; ... $a_1 = \dots$, $a_2 = \dots$,

$$d = \dots, a_n = \dots$$

3) 1; 3,5; 6; ... $\dots$

- 8 Число -15 является членом арифметической прогрессии 3; 1; -1; ... Найти номер этого члена.

$a_1 = 3$, $a_2 = \dots$, откуда $d = \dots = \dots$. Так как по условию $a_n = -15$, то по формуле $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ имеем

$$-15 = 3 + (n - 1) \cdot \dots$$

Решим относительно n полученное уравнение:

Ответ. $n = \dots$

- 9 Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1 = -8$, $a_5 = 4$. По формуле общего члена для $n = 5$ имеем уравнение

$$4 = -8 + (5 - 1) \cdot d.$$

Решим это уравнение относительно d :

Ответ. $d =$

- 10 Найти первый член арифметической прогрессии, если $d = -7$, $a_5 = -28$.

В формулу общего члена $a_n =$ подставим $n = 5$, $a_5 = -28$, $d = -7$ и получим уравнение относительно a_1 :

$$..... = a_1$$

Ответ. $a_1 =$

- 11* Дана арифметическая прогрессия, в которой $a_1 = 25$, $d = -3$. При каких значениях n члены этой прогрессии отрицательны?

Для данной прогрессии $a_n =$ По условию $a_n < 0$, когда < 0 . Решим это неравенство относительно n :

Ответ. При n

- 12* Записать формулу n -го члена арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_4 = -18$, $a_6 = -12$. Согласно формуле $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ ($n > 1$),

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \text{ Тогда } d = a_5 - a_4 =$$

По формуле n -го члена, например для a_4 , получим $-18 = a_1 + 3 \cdot$, откуда $a_1 =$

Ответ. $a_n =$ $+(n - 1) \cdot$

2) $a_3 = 26$, $a_8 = 48$. С помощью формулы n -го члена для a_3 и a_8 составим систему уравнений:
$$\begin{cases} 26 = a_1 + 2d, \\ 48 = \end{cases}$$

Решим эту систему относительно a_1 и d :

Ответ. $a_n =$

III

13 Записать формулу n -го члена арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -18, d = 0,2$.

2) $a_6 = -13, d = -2$.

3) $a_1 = 26, a_8 = 5$.

4) $a_2 = 11, a_7 = 49$.

Ответ. 1) ; 2) ;

3) ; 4) .

§ 19. Сумма n первых членов арифметической прогрессии

I

1 Найти рациональным способом сумму всех натуральных чисел от 1 до 10.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + (\dots) + (\dots) + (\dots) = 11 \cdot \dots = \dots$$

2 Найти $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ рациональным способом.

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\ + \\ S = 9 + 8 + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots \end{array}$$

$$2S = 10 + 10 + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$2S = 10 \cdot \dots, 2S = \dots, \text{откуда } S = \dots : 2, S = \dots$$

Ответ. $S = \dots$

II

- 3 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 2$, $a_n = 40$, $n = 30$. По формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ находим

$$S_{30} = \frac{2 + 40}{2} \cdot 30 = \dots\dots\dots$$

2) $a_1 = -3$, $a_n = -23$, $n = 20$. $S_{20} = \dots\dots\dots$

- 4 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии:

1) $-18; -14; -10; \dots$, если $n = 12$.

$$d = -14 - (-18) = \dots\dots\dots, a_{12} = -18 + 11 \cdot \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$S_{12} = \frac{-18 + \dots\dots\dots}{2} \cdot \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

2) $1,5; 5,5; 9,5; \dots$, если $n = 10$. $\dots\dots\dots$

- 5 Арифметическая прогрессия задана формулой n -го члена $a_n = 7n - 2$. Найти S_{40} .

$$a_1 = 7 \cdot 1 - 2 = \dots\dots\dots$$

$$S_{40} = \dots\dots\dots$$

Ответ. $\dots\dots\dots$

- 6 Найти a_1 и d арифметической прогрессии, если $a_6 = 53$, $S_6 = 150$. По формуле общего члена арифметической прогрессии $53 = a_1 + 5d$, откуда $a_1 = 53 - 5d$. По формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии $150 = \frac{(53 - 5d) + 53}{2} \cdot 6$. Решим это уравнение относительно d :

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{Так как } 53 = a_1 + 5 \cdot \dots\dots\dots, \text{ то } a_1 = \dots\dots\dots$$

$$\text{Ответ. } a_1 = \dots\dots\dots, d = \dots\dots\dots$$

III

- 7 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -4$, $a_n = 18$, $n = 15$. $\dots\dots\dots$

2) $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{3}{2}, n = 12.$

3) $a_1 = 42, d = -4, a_n = 10.$

- 8 Найдите a_n и d арифметической прогрессии, если $a_1 = -\frac{1}{2}, n = 11, S_{11} = -33.$

Ответ. $a_n = \dots, d = \dots$

§ 20. Геометрическая прогрессия

1

- 1 Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \dots;$ 2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \dots;$

3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \dots;$ 4) $5 \cdot 2^3 = \dots;$

5) $(5 \cdot 2)^3 = \dots;$ 6) $8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \dots;$

7) $2^{10} : 2^5 = \dots;$ 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10} : \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \dots$

- 2 Вычислить:

1) $\sqrt{81} = \dots;$ 2) $\sqrt{\frac{9}{64}} = \dots;$ 3) $\sqrt{16 \cdot 25} = \dots$

- 3 Найдите n , если:

1) $2^5 = 2^n; n = \dots;$ 2) $3^7 = 3^{n-1}; \dots;$

3) $(-2)^n = 16; \dots;$ 4) $2^{n+1} = 32; \dots$

4 Решить уравнение:

1) $x^2 = 4$; 2) $a^4 = \frac{1}{16}$; 3) $x^3 = -8$.

Ответ. 1); 2); 3)

II

5 Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии:

1) 9; 3; 1; ...; $b_1 = \dots$, $b_2 = \dots$, $q = \frac{b_2}{b_1} = \dots = \dots$;

2) -10; 30; -90;

6 Записать первые 4 члена геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$. $b_1 = 8$, $b_2 = b_1 \cdot q = \dots$, $b_3 = b_2 \cdot q = \dots$,

$b_4 = \dots$.

2) $b_1 = -3$, $q = -2$. $b_1 = -3$, $b_2 = b_1 \cdot q = \dots$, $b_3 = \dots$,

$b_4 = \dots$.

7 Доказать, что последовательность, заданная формулой n -го члена $b_n = 6^{n+1}$, является геометрической прогрессией.

$b_{n+1} = 6^{(n+1)+1} = 6^{\dots}$, $b_n \neq 0$,

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{6^{\dots}}{6^{n+1}} = 6^{\dots} = \dots$ — не зависит от n , значит, данная последовательность (по определению) — геометрическая прогрессия.

8 Найти b_6 , если:

1) $b_1 = 7$, $q = -2$. По формуле n -го члена геометрической прогрессии $b_6 = 7 \cdot (-2)^{6-1} = \dots$.

2) $b_1 = -3$, $q = \frac{1}{2}$

9 В геометрической прогрессии $b_1 = 5$, $q = 3$. Найти номер члена прогрессии, равного 405.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Если $b_n = 405$, $b_1 = 5$ и $q = 3$, то нужно решить уравнение $405 = 5 \cdot 3^{n-1}$ относительно n :

$405 = 5 \cdot 3^{n-1}$, откуда $3^{n-1} = \dots$, $3^{n-1} = 3^{\dots}$,

$n-1 = \dots$, $n = \dots$.

Ответ.

- 10** Найти знаменатель геометрической прогрессии, если $b_1 = 64$, $b_6 = -2$.

По формуле n -го члена геометрической прогрессии получим уравнение $-2 = 64 \cdot q^{6-1}$.

Решим это уравнение относительно q :

.....
.....
Ответ.

- 11** Найти первый и третий члены геометрической прогрессии с положительными членами, если $b_2 = \frac{2}{9}$, $b_4 = \frac{1}{8}$.

$$b_3 = \sqrt{b_2 \cdot b_4} = \dots\dots\dots$$

$$q = \frac{b_3}{b_2} = \dots\dots\dots, b_1 = b_2 : q = \dots\dots\dots$$

Ответ. $b_1 = \dots\dots\dots$, $b_3 = \dots\dots\dots$.

- 12** По формуле сложных процентов $b = b_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ с помощью микрокалькулятора найти:

1) b , если $b_1 = 10\,000$, $p = 4$, $n = 4$;

.....
2) b_1 , если $b = 16\,224$, $p = 4$, $n = 2$;

.....
3) p (с точностью до 1), если $b = 57\,881,25$, $b_1 = 50\,000$, $n = 3$.

- 13** Банк начисляет по вкладам 3% годовых. Сколько денег будет на счету у вкладчика через 4 года, если он положил на счёт 200 000 р. и не снимал со счёта деньги?

.....
.....
III

- 14** Найти седьмой член геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$

2) $b_1 = 1$, $b_2 = -2$

- 4 В геометрической прогрессии найти b_1 и b_5 , если $q = -2$, $S_5 = 44$. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ имеем $44 = \frac{b_1(1 - (-2)^5)}{1 - (-2)}$.

Решим это уравнение относительно b_1 :

По формуле n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$ найдём $b_5 = \dots \cdot (-2)^{\boxed{}} = \dots$.

Ответ. $b_1 = \dots$, $b_5 = \dots$.

- 5 В геометрической прогрессии найти число её членов n , если известно, что $S_n = -7\frac{1}{2}$, $b_1 = -4$, $q = \frac{1}{2}$.

По формуле суммы n членов имеем: $-7\frac{1}{2} = \frac{\dots (1 - (\dots)^n)}{1 - \dots}$.

Решим это уравнение относительно n :

.....
.....

Ответ. $n = \dots$.

- 6 В геометрической прогрессии найти:

1) b_n , если $b = 5$, $q_1 = 2$, $S_n = 155$. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии $155 = \frac{\dots (1 - \dots^n)}{1 - \dots}$.

Решим полученное уравнение относительно n :

.....
..... $n = \dots$

По формуле общего члена $b_n = b_1 q^{n-1}$ найдём $b_{\boxed{}} = \dots$.

2) n и q , если $b_1 = -2$, $b_n = -486$, $S_n = -728$. Воспользуемся следующей формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$.

Подставив в неё $b_1 = -2$, $b_n = -486$, $S_n = -728$, получим уравнение $\dots$, которое решим относительно q : $\dots$

Зная, что $q = \dots$, по формуле общего члена имеем $-486 = -2 \cdot \square^{n-1}$. Отсюда найдём n : $\dots$

Ответ. 1) $b_n = \dots$; 2) $q = \dots$, $n = \dots$.

- 7 Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = -3 \cdot 2^{n+1}$. Найти S_7 .

$b_1 = \dots$, $b_2 = \dots$, откуда $q = \dots$.

По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_7 = \dots$.

Ответ. $S_7 = \dots$.

- 8 Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии 128; 64; 32; ...

Ответ. $\dots$.

III

- 9 В геометрической прогрессии $b_1 = -1$, $b_2 = 3$, $b_n = 243$. Найти q , n , S_n .

Ответ. $q = \dots$, $n = \dots$, $S_{\square} = \dots$.

- 10 В геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = 4$, $S_n = 682$. Найти n и b_n .

Ответ. $\dots$.

Случайные события

§ 22. События

I

Заполнить пропуски (1—3).

- 1 В результате бросания игрального кубика на верхней грани может появиться число очков, равное: 1;
- 2 В результате бросания монеты может появиться:
орёл;
- 3 В полной колоде карт (36 листов) находится:
 - 1) карт пиковой масти —
 - 2) карт красных мастей —
 - 3) валетов чёрных мастей —
 - 4) тузов —
 - 5) карт с числами —
 - 6) карт с картинками —

II

- 4 Закончить формулировку определения.
 - 1) Невозможным называют событие, которое в данных условиях
.....
 - 2) Достоверным называют событие, которое в данных условиях
.....
 - 3) Случайным называют событие, которое в данных условиях
.....
 - 4) Несовместными называют два события, которые в данных условиях
.....

- 5 Записать, **невозможным**, **достоверным** или **случайным** является событие, которое может произойти в результате бросания двух игральных костей.

На первой кости выпало 6 очков, а на второй выпало 7 очков — *невозможное*.

- 1) На обеих костях выпало по 6 очков —
- 2) Сумма выпавших очков больше 1 —
- 3) Сумма выпавших очков равна 7 —
- 4) Произведение выпавших очков равно 6 —
- 5) Произведение выпавших очков равно 7 —

- 6 Записать, какие из пар событий, которые могут произойти в результате одного бросания игральной кости, являются **совместными**, а какие — **несовместными**.

Выпало 2 очка; выпало 6 очков — *несовместные*.

- 1) Выпало 3 очка; выпало число очков, кратное 6 —
- 2) Выпало 5 очков; выпало число очков, не меньшее, чем 4 —
- 3) Выпало 3 очка; выпало число очков, не большее, чем 3 —

- 7 Обвести номера пар равновозможных событий, которые могут произойти в результате одного бросания игральной кости.

- 1) Выпало 3 очка; выпало 4 очка.
- 2) Выпало 6 очков; выпало нечётное число очков.
- 3) Выпало нечётное число очков; выпало чётное число очков.
- 4) Выпало 3 очка; выпало число очков, кратное 3.

III

- 8 Записать **невозможным**, **достоверным** или **случайным** является событие.

- 1) Два ученика одного класса (в котором 30 человек) родились в один и тот же день —
- 2) Сумма очков, выпавших на двух брошенных игральных костях, меньше 12 —
- 3) Произведение очков, выпавших на двух брошенных игральных костях, не меньше 1 —
- 4) В текущем году 367 дней —

9 Испытание состоит в следующем: из полного набора домино извлекается одна костяшка и прочитываются числа очков на её половинках. Записать, **совместными** или **несовместными** являются события.

1) Одно число равно 2; второе число нечётное —

2) Оба числа чётные; одно число больше другого —

3) Сумма очков равна 1; произведение очков равно 0 —

4) Произведение очков равно 0; сумма очков равна 8 —

10 Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Являются ли **равновозможными** события:

1) вынута дама бубей; вынут валет красной масти —

2) вынута семёрка треф; вынут король червей —

§ 23. Вероятность события

1

1 Заполнить пропуски.

1) В классе 25 учащихся, среди которых 11 мальчиков. Мальчики составляют часть учащихся класса.

2) В вазе лежат 5 яблок и 6 груш. Груши составляют часть всех фруктов, находящихся в вазе.

3) В полном наборе домино дубли составляют часть всех костяшек.

4) В полной колоде карт (36 листов): карты красной масти составляют часть всех карт; трефовые карты составляют часть всех карт; бубновый туз составляет часть всех карт.

2 Заполнить пропуски.

1) Куб имеет граней.

- 2) Куб имеет рёбер.
- 3) Куб имеет вершин.
- 4) Куб с ребром 3 см имеет объём и площадь поверхности

II

3 Заполнить пропуски в предложениях.

1) Измерением степени достоверности наступления событий занимались в XVII в. французские учёные

2) Долю успеха наступления некоторого события математики называют

3) Вероятность события A обозначают

4) Вероятность события A равна, где n — число, m — число

4 В ящике находятся 3 белых, 5 красных и 9 чёрных шаров. Наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар:

1) Белый. Число всех равновозможных исходов $n = 3 + 5 + 9 = \dots$. Событию A (появился белый шар) благоприятствуют $m = 3$ исходов. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{\dots} = \dots$.

2) Красный. Событие A — появился красный шар, $n = \dots$, $m = \dots$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \dots$.

3) Чёрный. Событие A —

5 На двенадцати одинаковых карточках написаны числа от 1 до 12 (на каждой карточке — одно число). Карточки перемешали и наугад вынули одну. Найти вероятность того, что на карточке оказалось:

1) Число 5. Число всех возможных исходов $n = 12$, $m = 1$, поэтому $P = \frac{m}{n} = \dots$;

2) Чётное число. $m = \dots$

3) Число, кратное 3.

- 4) Число, большее 6.
- 5) Число, не меньшее 10.
- 6) Число, большее 2, но меньшее, чем 7.

III

6 Раскручивается стрелка рулетки, поле которой разделено на 20 равных секторов, пронумерованных числами от 1 до 20. Найти вероятность того, что стрелка остановилась на секторе:

- 1) с номером, кратным 5.
- 2) номер которого не меньше 16.

Ответ. 1); 2)

7 Случайным образом из колоды карт (36 листов) извлекается одна карта. Найти вероятность того, что эта карта:

- 1) девятка пик.
- 2) дама красной масти.
- 3) король.
- 4) карта с числом.

Ответ. 1); 2); 3); 4)

§ 24. Решение вероятностных задач с помощью комбинаторики

I

1 С помощью цифр 5 и 6 записать всевозможные трёхзначные числа:

2 Сколько различных двузначных чисел (цифры в которых не повторяются) можно записать с помощью цифр:

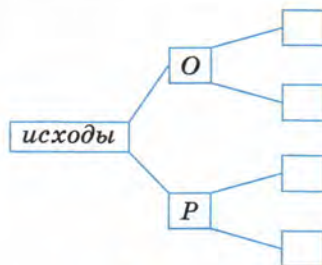
- 1) 1 и 2.
- 2) 1, 2 и 3.
- 3) 1, 2, 3 и 4.

Ответ. 1); 2); 3)

- 3 Бросают два игральных тетраэдра: белый и красный (грани каждого пронумерованы числами от 1 до 4). Заполнить таблицу вариантов появления чисел на нижних гранях тетраэдров:

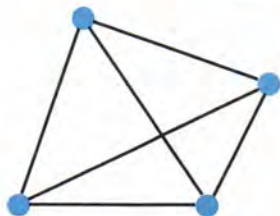
Красный тетраэдр Белый тетраэдр	1	2	3	4
1	11	12		
2				
3				
4				

- 4 Монету бросают дважды. Завершить построение графа-дерева, иллюстрирующего возможные варианты (исходы испытания) появления орла (O) и решки (P).



- 5 Сколькими способами можно выбрать двоих школьников для дежурства в столовой, если:

школьников четверо? С помощью графа определим число различных пар, которые можно составить из четверых школьников: $\frac{4 \cdot (4-1)}{2} = 6$.



1) школьников пятеро? Можно составить = 10 пар.

2) школьников шестеро? Можно образовать различных пар.



II

- 6 Имеются две рулетки, поверхность каждой из которых разделена на 8 равных секторов, пронумерованных числами от 1 до 8. Стрелки рулеток раскручивают. Найти вероятность события:

A — на первой рулетке стрелка остановилась на числе 3, а на второй — на числе 5.

Согласно правилу произведения число возможных исходов испытания

$$n = 8 \cdot \dots = \dots$$

Событию A благоприятствует единственный исход, т. е. $m = 1$.

$$\text{Таким образом, } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{n}.$$

1) B — на первой рулетке стрелка остановилась на числе 8, а на второй — на чётном числе. Число исходов, благоприятствующих событию B — появлению числа 8 на первой рулетке и чётного числа (их четыре: 2, 4, 6, 8) на второй рулетке, находится по правилу произведения: $m = 1 \cdot 4 = 4$. Тогда $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{4}{n} =$

=

2) C — на первой рулетке стрелка остановилась на чётном числе, а на второй — на нечётном. Согласно правилу событию C благоприятствуют $m = 4 \cdot \dots = \dots$ исходов. Таким образом, $P(C) = \frac{m}{n} = \dots = \dots$.

3) D — на первой рулетке стрелка остановилась на числе, большем 3, а на второй — на числе, не большем 3. Чисел, на которых может остановиться стрелка первой рулетки, всего 5. Чисел, на которых может остановиться стрелка второй рулетки, — Согласно правилу число исходов, благоприятствующих событию D , равно $m = 5 \cdot \dots = \dots$. Тогда $P(D) = \frac{m}{n} = \dots$.

7 Брошены две игральные кости: белая и красная. Найти вероятность события:

A — на обеих костях появились очки, кратные 3.

Число возможных исходов испытания $n = \dots$.

$$m = \dots, P(A) = \dots$$

1) B — на костях появились разные очки

2) C — выпали очки, сумма которых равна 4

3) D — выпали очки, сумма которых не больше 4

8* В коробке лежат 4 белых и 2 чёрных шара. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события:

1) A — вынуты 2 белых шара. Из 6 имеющихся шаров можно составить различных пар, т. е. число всех возможных исходов испытания $n = \dots$. Событию A благоприятствуют все возможные пары, образованные из 4 имеющихся белых шаров. Таких пар, т. е. $m = \dots$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \dots$.

2) B — вынуты белый и чёрный шары. Событию B благоприятствуют все пары, составленные из одного белого и одного чёрного шаров. Согласно правилу произведения таких пар, т. е. $m = \dots$. Таким образом, $P(B) = \frac{m}{n} = \dots$.

III

9 Бросают монету и игральную кость. Найти вероятность события:

1) A — на монете появился орёл, а на кости — 6 очков
2) B — на монете появилась решка, а на кости — число очков, кратное 3

10 Имеются две рулетки: белая и жёлтая. Поле белой рулетки разделено на 6 равных секторов (пронумерованных числами от 1 до 6). Поле жёлтой рулетки разделено на 10 равных секторов (пронумерованных числами от 1 до 10). Стрелки обеих рулеток раскрутили. Найти вероятность события:

1) A — стрелка белой рулетки остановилась на секторе с нечётным номером, а стрелка жёлтой рулетки остановилась на секторе, номер которого не меньше 5

2) B — стрелки рулеток остановились на секторах, номера которых больше 3

11* В вазе лежат 3 яблока и 4 апельсина. Не глядя, из вазы вынимают два плода. Найти вероятность того, что:

1) вынуты два яблока
2) вынуты два апельсина
3) вынуты яблоко и апельсин

§ 25. Геометрическая вероятность

1

1 Найти отношение длин отрезков:

1) $AB : BC$ Ответ.

2) $CD : AD$ Ответ.

3) $AB : AD$ Ответ.

4) $BC : AD$ Ответ.



2 Найти отношение площадей:

1) треугольников MBN и ABC

2) квадратов $BKPM$ и $BCDA$

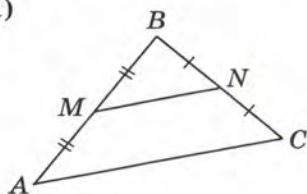
3) квадратов $NBZQ$ и $ABCD$

4) кругов с радиусами r и R

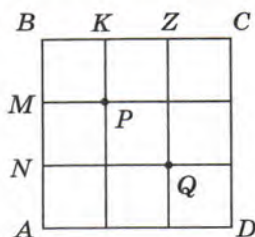
5) секторов 1 и 2

6) секторов 2 и 5

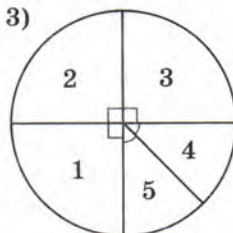
1)



2)



3)



Ответ. 1); 2); 3);

4); 5); 6)

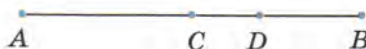
3 Найти отношение объёмов кубов с рёбрами:

1) 1 и 3. Ответ.

2) 2 и 3. Ответ.

II

- 4 Дано: $AB = 10$ см, $CD = 2$ см, $DB = 3$ см. На отрезке AB случайным образом отмечается точка X . Найти вероятность того, что точка X попадёт:



1) на отрезок CD . Вероятность попадания точки X на отрезок CD равна $P = \frac{CD}{AB} = \dots\dots\dots$;

2) на отрезок AD . Так как $AD = \dots\dots\dots$; $P = \frac{AD}{AB} = \dots\dots\dots$;

3) на отрезок AC . Так как $AC = \dots\dots\dots$; $P = \dots\dots\dots$.

- 5 Поверхность рулетки разделена на 6 секторов. Найти вероятность того, что стрелка рулетки после раскручивания остановится:

1) на секторе 1. Площадь S_1 сектора 1

в $\dots\dots\dots$ раза меньше площади S всего круга, поэтому вероятность того, что стрелка остановится на секторе 1, равна

$$P = \frac{S_1}{S} = \dots\dots\dots;$$

2) на секторе 4. Площадь S_4 сектора 4

в $\dots\dots\dots$ раз меньше площади S всего

круга, поэтому $P = \dots\dots\dots$;

3) на секторе, номер которого не больше 4. Площадь секторов, номера которых больше 4, равна $S_3 + S_2 + S_1$. Приняв площадь всего круга S за 1, получим $S_3 + S_2 + S_1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \dots\dots\dots$.

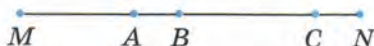
$$S_3 + S_2 + S_1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \dots\dots\dots$$

$$\text{Тогда } P = \frac{S_3 + S_2 + S_1}{S} = \frac{1}{1} = \dots\dots\dots$$



III

- 6 Дано: $MN = 15$ см, $MA = 5$ см, $AB = CN = 2$ см. На отрезке MN случайным образом отмечается точка X . Найти вероятность того, что эта точка попадёт на отрезок:

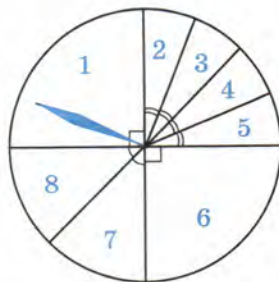


1) MA . $\dots\dots\dots$ Ответ. $\dots\dots\dots$

2) MB . $\dots\dots\dots$ Ответ. $\dots\dots\dots$

3) BC . $\dots\dots\dots$ Ответ. $\dots\dots\dots$

- 7 Раскручивается стрелка рулетки, сектора которой пронумерованы числами от 1 до 8. Найти вероятность того, что стрелка остановится:



1) на секторе 7.

Ответ.

2) на секторе 3.

Ответ.

§ 26. Относительная частота и закон больших чисел

1

- 1 Десять лет своей жизни юноша, которому сейчас 20 лет, учился в школе, а 2 года он служил в армии. Какую часть своей жизни юноша:

1) учился в школе?

2) служил в армии?

Ответ. 1) ; 2)

- 2 Обыкновенную дробь представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби и округлить её до сотых:

1) $\frac{1}{6} =$

2) $\frac{2}{7} =$

- 3 Найти, сколько процентов составляет число M от числа N , если:

1) $M = 14$, $N = 200$

2) $M = 33$, $N = 250$

Ответ. 1) ; 2)

II

4 Заполнить пропуски:

- 1) Относительной частотой события A в данной серии испытаний называют
- 2) Относительную частоту события A обозначают
- 3) Относительная частота события A находится по формуле
- 4) Под статистической вероятностью события понимают число,

5 Заполнить таблицу:

Число испытаний с подбрасыванием гайки	10	40	100	200	500	1000
Частота падения гайки плашмя	8	31	77			
Относительная частота падения гайки плашмя	0,8	$\frac{31}{40}$		0,85		
Число падений гайки на грань	2				96	
Относительная частота падения гайки на грань	0,2					0,18

III

- 6 В изготовленной партии из 2000 одинаковых игрушек 24 игрушки оказались бракованными. Найти относительную частоту появления в данной партии бракованной игрушки (результат выразить в процентах).

Ответ.

Случайные величины

§ 27. Таблицы распределения

I

1 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:

- 1) на обеих костях появилось по 3 очка
- 2) на одной кости появилось 1 очко, а на другой — 2 очка
- 3) сумма выпавших очков равна 2
- 4) сумма выпавших очков равна 11

Ответ. 1); 2); 3); 4)

2 Имеются две одинаковые рулетки, поверхность каждой из которых разделена на 4 одинаковых сектора. Сектора пронумерованы числами от 1 до 4. Раскручивают стрелки рулеток и прочитывают числа, на которых остановились стрелки. Затем находят сумму появившихся чисел. Заполнить таблицу возможных сумм этих чисел и найти вероятность того, что полученная описанным способом сумма равна: 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

	2-я рулетка			
1-я рулетка	1	2	3	4
1	2	3		
2				
3				
4				

Ответ. 1); 2); 3); 4)

II

- 3 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившегося при бросании игрального кубика:

1) на одной грани которого отмечено 1 очко, а на остальных — 2 очка. $X_1 = 1$, $X_2 = 2$. Всего граней $n = 6$. При этом $m_1 = 1$, $m_2 = 5$, поэтому $P_1 = \frac{1}{6}$, $P_2 = \dots\dots\dots$. Таблица распределения имеет вид:

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	

2) на двух гранях которого отмечено 1 очко, а на остальных — 2 очка. $X_1 = \dots$, $X_2 = \dots$; $n = 6$, $m_1 = \dots$, $m_2 = \dots$; $P_1 = \dots$, $P_2 = \dots\dots\dots$.

X	1	2
P		

3) на одной грани которого отмечено 1 очко, на трёх — 2 очка, на двух — 3 очка. $X_1 = \dots$, $X_2 = \dots$, $X_3 = \dots$; $n = 6$, $m_1 = \dots$, $m_2 = \dots$, $m_3 = \dots$; $P_1 = \dots$, $P_2 = \dots$, $P_3 = \dots\dots\dots$.

X			
P			

4) на четырёх гранях которого отмечено 1 очко, на одной — 2 очка, на одной — 3 очка.

X	
P	

- 4 Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся в номерах квартир, которые посетил за день участковый врач:

1) 8, 5, 23, 48, 17, 9, 64, 109, 37, 83, 71.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
подсчёт										
M	1	3	1							

2) 82, 56, 31, 19, 4, 26, 8, 40, 67, 35, 105.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
подсчёт										
M										

- 5 Используя данные задачи 4, составить таблицу распределения по относительным частотам значений величины X в выборке.

1) Число всех цифр в выборке $N = 20$. По формуле $W = \frac{M}{N}$ находим относительную частоту W для каждого значения X и заносим её в таблицу:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1	3	1							
W	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$							

2) Число всех цифр в выборке $N = \dots\dots$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M										
W										

III

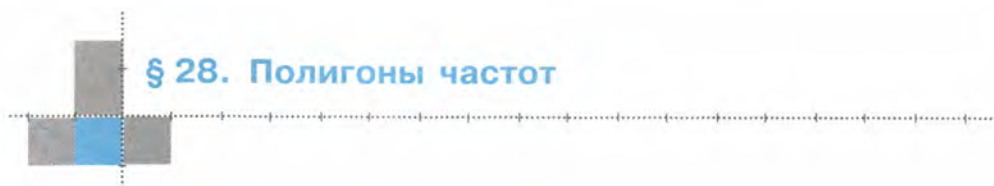
- 6 На стол одновременно бросают два игральных тетраэдра, грани которых пронумерованы числами от 1 до 4. Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — произведений очков на гранях тетраэдров, касающихся поверхности стола.

Составим таблицу произведений выпавших на тетраэдрах очков:

	2-й тетраэдр			
1-й тетраэдр	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

X	
P	

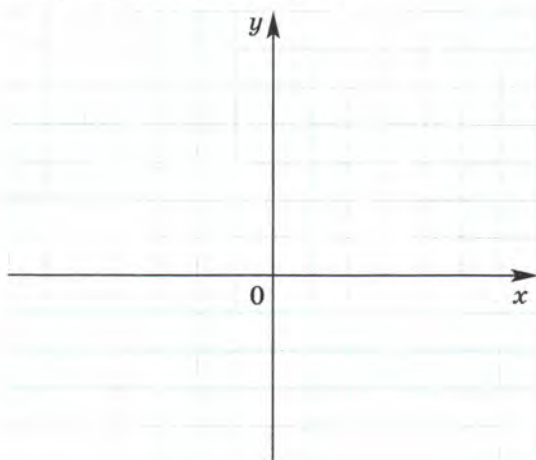
- 7 Известны номера месяцев, в которых родились учащиеся одного класса: 3, 5, 12, 4, 1, 6, 8, 2, 7, 3, 5, 9, 10, 7, 1, 7, 10, 9, 3, 11, 12, 5, 9, 12, 2, 12. На основании приведённых данных составить таблицу распределения по частотам M и по относительным частотам W значений случайной величины X — номеров месяцев рождения учащихся класса.



§ 28. Полигоны частот

I

- 1 На координатной плоскости отметить точки $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(5; 2)$, $D(-1; 4)$, $E(3; -2)$, $F(-5; -3)$.



- 2 Найти:

- 1) 15% от числа 120.
- 2) число, 45% которого равны 30.

3) сколько процентов составляет число 85 от числа 60.

4) сколько процентов составляет число 12 от числа 96.

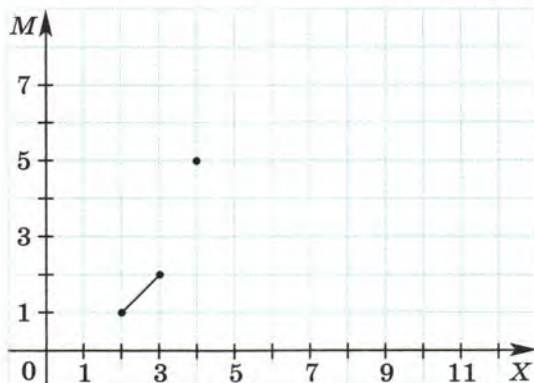
Ответ. 1); 2); 3); 4)

II

- 3 Распределение величины X по частотам M представлено в таблице:

X	2	3	4	6	7	8	9
M	1	2	5	7	6	4	3

Завершить представление распределения X в виде полигона частот.



- 4 Используя данные таблицы распределения по частотам значений случайной величины X , построить полигон относительных частот распределения величины X .

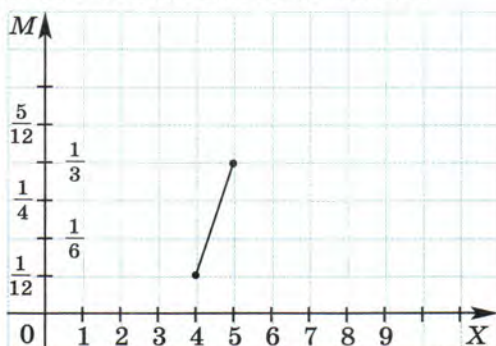
1)

X	4	5	6	7
M	1	4	4	3

$N = \Sigma M = 1 + 4 + 4 + 3 = 12$. Для каждого значения X найдём его относительную частоту в выборке по формуле $W = \frac{M}{N}$:

X	4	5	6	7
M	1	4	4	3
W	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$		

Построим полигон относительных частот.

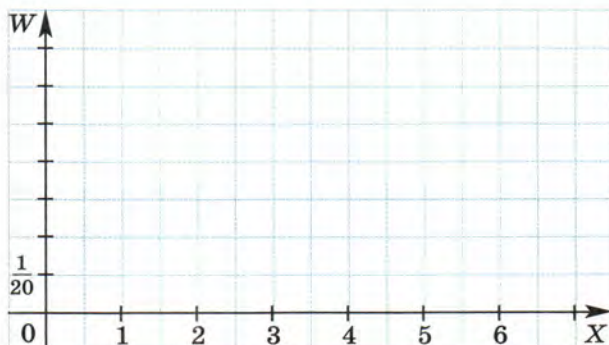


2)

X	1	2	3	4	5	6
M	2	3	5	7	2	1

$N = \dots\dots\dots$. Полигон изобразим на рисунке.

X						
M						
W						



- 5 Используя транспортир, представить в виде круговой диаграммы распределение по относительным частотам значений случайной величины X , заданной распределением по частотам.

1)

X	1	2	3
M	3	4	1

Найдём относительные частоты каждого значения случайной величины и выразим их в процентах: $N = 3 + 4 + 1 = 8$,

$$W_1 = \frac{M_1}{N} = \frac{3}{8} = 37,5\%, W_2 = \frac{M_2}{N} = \frac{4}{8} = \dots\dots\dots, W_3 = \dots\dots\dots$$

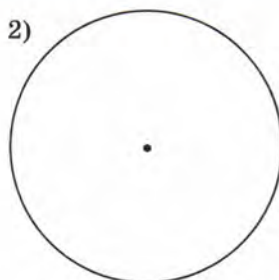
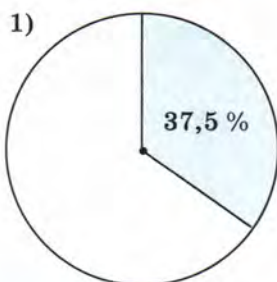
Приняв площадь круга за 100%, значения W_1 , W_2 и W_3 изобразим в виде секторов с соответствующими площадями. Центральные углы соответствующих секторов будут равны:

$$\frac{360^\circ \cdot 3}{8} = 135^\circ, \quad \frac{360^\circ \cdot \dots}{8} = \dots, \quad \frac{360^\circ \cdot \dots}{8} = \dots$$

2)

X	1	2	3	4
M	1	3	4	2

$N = \dots$, $W_1 = \dots$, $W_2 = \dots$, $W_3 = \dots$,
 $W_4 = \dots$. Центральные углы соответствующих секторов будут равны: $\dots$. Изобразим их на рисунке.



III

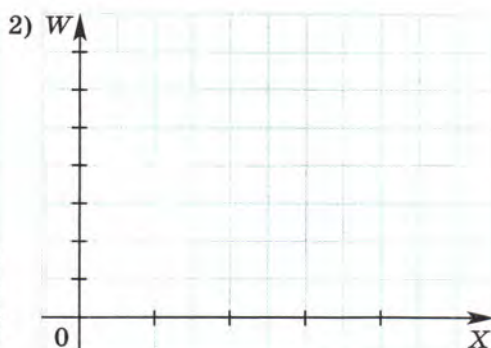
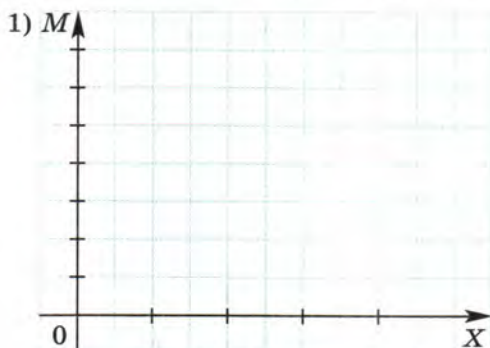
- 6 Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X , распределение которой представлено в таблице:

X	1	2	3	4	5
M	3	5	6	4	2

.....

X					
M					
W					

Полигоны частот изобразим на рисунках.



§ 29. Генеральная совокупность и выборка

I

1 Решить уравнение:

1) $\frac{5}{x} = \frac{2}{3};$

2) $3 = \frac{45}{x};$

3) $\frac{x}{4} = 12.$

.....
 Ответ. 1); 2); 3)

2 Найти величины углов треугольника, если известно, что они пропорциональны числам 1, 3 и 5.

.....

 Ответ.

II

3 Объем текста 5000 слов. Определить примерное число глаголов в нём, если относительная частота появления глаголов в тексте примерно равна: 1) 0,2; 2) 0,3.

1) По условию объем текста (генеральной совокупности) $s = 5000$, относительная частота глаголов в тексте $W = 0,2$. По формуле (2)

учебника число глаголов во всём тексте $S = s \cdot W = 5000 \cdot 0,2 =$
 $=$

2)

Ответ. 1); 2)

- 4 Фабрика по пошиву кожаных изделий должна изготовить 1500 пар мужских перчаток для офицеров Северного флота. Сколько пар каждого размера должна пошить фабрика, если результаты выявления размеров у 200 офицеров, выбранных случайным образом, показали, что размеры перчаток X распределены в этой выборке по частотам M следующим образом:

X	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
M	11	18	30	42	50	24	15	10

Составим таблицу распределения по относительным частотам значений случайной величины X , зная, что объём выборки $N = 200$:

X	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
M	11	18	30	42	50	24	15	10
W	0,225							

По формуле $S = 1500 \cdot W$ найдём число пар каждого размера в совокупности из 1500 пар:

X	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
S								

III

- 5 При определении сорта изготовленных керамических изделий в партии объёмом 1300 штук контролёр первоначально определил сортность у 100 случайно выбранных из партии изделий. Результаты занёс в таблицу:

Сорт	I	II	III
Количество изделий	46	25	29

Определить примерное число изделий I и II сортов вместе в изготовленной партии.

Ответ.

- 6 В водоём запустили 50 000 мальков карпа. Через год выловили случайным образом 100 подросших карпов и каждого взвесили с точностью до 10 г. После разбиения на классы полученных данных о весе рыб (X) составили таблицу распределения веса по частотам (M):

Номер класса	1	2	3	4	5
X (г)	150—199	200—249	250—299	300—349	350—399
M	9	22	35	24	10

Считая, что за год не погибло практически ни одной рыбы, определить, сколько примерно рыб в водоёме попадает в каждый весовой класс.

.....

Ответ.



§ 30. Размах и центральные тенденции

1

- 1 Найти значение выражения $a - b$, если:

1) $a = 15$, $b = 18$

2) $a = -20$, $b = 8$

3) $a = -34$, $b = 17$

4) $a = 25$, $b = -6$

Ответ. 1) ; 2) ; 3) ; 4)

2 Найти среднее арифметическое чисел:

1) 2 и 10.

2) -5 и -6.

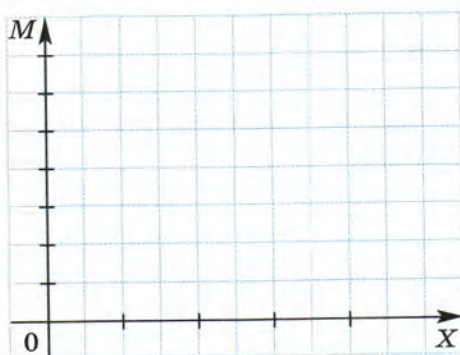
3) 13, 14, 15, 16.

4) -4, -3, -2, -1, 1.

Ответ. 1) ; 2) ; 3) ; 4)

3 Построить полигон частот значений случайной величины X :
3, 0, 5, 1, 0, 2, 4, 5, 3, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 5, 0, 3, 4, 1.

X									
M									



4 Округлить число 24,698:

1) до сотых.

2) до десятых.

3) до единиц.

4) до десятков.

Ответ. 1) ; 2) ; 3) ; 4)

5 Найти значение выражения $53,6 : 7$ с точностью:

1) до десятых.

2) до сотых.

Ответ. 1) ; 2)

II

6 Заполнить пропуски.

- 1) Размахом выборки называют
- 2) Модой выборки называют
- 3) Медиана выборки — это
- 4) Если упорядоченная выборка имеет нечётное число данных, то её медиана равна
- 5) Если упорядоченная выборка имеет чётное число данных, то её медиана равна
- 6) Средним значением случайной величины X называют
- 7) Среднее значение выборки $X_1, X_2, \dots, X_N$ обозначают и находят по формуле

7 Найти размах R выборки значений случайной величины X :

- 1) 6, 6, 7, 8, 10, 12. $R = 12 - 6 =$
- 2) -3, -2, -2, 0, 0, 1. $R =$
- 3) -4, 2, -5, 3, 1. $R = 3 - (-5) =$
- 4) 12, 20, -1, 15, 0, 12. $R =$

8 Найти моду Mo выборки значений величины X :

-2, -1, 0, 1, 2. Выборка не имеет моды.
5, -3, 2, 3, -3, 4. $Mo = -3$.

- 1) 1, 1, 2, 3, 3, 4. $Mo_1 = 1, Mo_2 =$
- 2) -1, 2, 0, 2, -1, 2, 3. $Mo =$

9 Найти медиану выборки:

7, 9, 5, 4, 6. Упорядочим выборку с нечётным числом данных: 4, 5, 6, 7, 9. Центральное значение медианы $Me = 6$.
2, 4, 1, -2, 4, -3. Запишем данные в виде упорядоченного ряда, содержащего чётное число элементов: -3, -2, 1, 2, 4, 4. Медиана равна среднему арифметическому двух центральных значений: $Me = \frac{1+2}{2} = 1,5$.

1) 1, 3, 1, 4, 0, 5, 2, 3. $Me =$

2) 3, 5, 1, 3, 2, 6, 4. $Me =$

10 Найти среднее значение выборки:

1) -3, -7, 0, 2, 5, 8, 2. $\frac{-3+(-7)+0+2+5+8+2}{7} =$

2) 5, 1, 6, 6, 3, 4, 3.

11 Найти среднее значение выборки случайной величины X , представленной таблицей распределения по частотам:

1)

X	-2	-1	1	3
M	1	2	4	1

$$\bar{X} = \frac{-2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1}{1 + 2 + 4 + 1} =$$

2)

X	-3	0	2	3
M	1	3	4	2

3)

X	0	1	2	3	4
M	1	2	5	3	1

4)

X	-1	0	0,1	0,3	0,5
M	2	2	3	2	1

.....

.....

.....

III

12 Найти размах, моду, медиану и среднее значение выборки:

1) 2, 3, 5, 6, 7.

.....

2) 3, 1, 5, 1, 2, 4.

.....

Ответ. 1); 2)

13 Найти размах, моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X , распределение которых по частотам представлено в таблице:

1)

X	0	1	2	3
M	1	2	3	1

.....

.....

.....

2)

X	-2	-1	0	1	2	3
M	1	3	4	5	2	1

.....

.....

.....

Ответ. 1); 2)

Оглавление

Предисловие	3
ГЛАВА I. Алгебраические уравнения.	
Системы нелинейных уравнений	
§ 1. Деление многочленов	4
§ 2. Решение алгебраических уравнений	8
§ 3. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим	13
§ 4. Системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными	18
§ 5. Различные способы решения систем уравнений	20
§ 6. Решение задач с помощью систем уравнений	24
ГЛАВА II. Степень с рациональным показателем	
§ 7. Степень с целым показателем	27
§ 8. Арифметический корень натуральной степени	31
§ 9. Свойства арифметического корня	—
§ 10. Степень с рациональным показателем	36
§ 11. Возведение в степень числового неравенства	—
ГЛАВА III. Степенная функция	
§ 12. Область определения функции	44
§ 13. Возрастание и убывание функции	48
§ 14. Чётность и нечётность функции	54
§ 15. Функция $y = \frac{k}{x}$	61
§ 16. Неравенства и уравнения, содержащие степень	67
ГЛАВА IV. Прогрессии	
§ 17. Числовая последовательность	72
§ 18. Арифметическая прогрессия	74
§ 19. Сумма n первых членов арифметической прогрессии	77
§ 20. Геометрическая прогрессия	79
§ 21. Сумма n первых членов геометрической прогрессии	82
ГЛАВА V. Случайные события	
§ 22. События	85
§ 23. Вероятность события	87
§ 24. Решения вероятностных задач с помощью комбинаторики	89
§ 25. Геометрическая вероятность	93
§ 26. Относительная частота и закон больших чисел	95
ГЛАВА VI. Случайные величины	
§ 27. Таблицы распределения	97
§ 28. Полигоны частот	100
§ 29. Генеральная совокупность и выборка	104
§ 30. Размах и центральные тенденции	106

Учебное издание
Колягин Юрий Михайлович
Сидоров Юрий Викторович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА

Рабочая тетрадь

9 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*

Редактор *Н. Н. Сорокина*

Младшие редакторы *Е. А. Андреевкова, Е. В. Трошко*

Художник *О. П. Богомолова*

Художественный редактор *О. П. Богомолова*

Компьютерная графика *И. В. Губина*

Технический редактор и верстальщик *Е. В. Саватеева*

Корректоры *Т. А. Лебедева, Е. Д. Светозарова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 24.05.12. Формат 70×100¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,97. Тираж 7000 экз. Заказ № 5186.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Тульская типография».

300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.